1. Grundlagen der Logik

Ziel: Wir wollen eine nachvollziehbare Begründung liefern, warum unsere Lösung richtig ist.

Wir wollen die Logik „ein bisschen formalisieren".

Unter einer Aussage stellen wir uns einen Satz vor, dem sich eindeutig einer der beiden Wahrheitswerte wahr oder falsch zuordnen lässt.

Beispiele (1) Die Zahl 6 ist durch 3 teilbar. wahr

(2) $\sqrt{5} > 3$ falsch

(3) Denk mal nach! keine Aussage in unserem Sinn

<u>Verknüpfungen von Aussagen</u>: Seien A, B Aussagen. Dann ist auch

- A und B (Schreibweise: $A \wedge B$)

  Beispiel: A: „ $x > 5$ "

  B: „ $x < 10$ "

  $A \wedge B$: „ $5 < x < 10$ "

- A oder B (Schreibweise: $A \vee B$)

- nicht A (Schreibweise: $\neg A$)

- $A \Rightarrow B$ (sprich: „wenn A, dann B" oder „aus A folgt B")

- $A \Leftrightarrow B$ („A genau dann, wenn B"
  oder „A ist äquivalent zu B")

wieder eine Aussage.

Was genau damit gemeint ist, erklären wir mittels einer <u>Wahrheitstafel</u>.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\neg A$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	w	f	w	w
w	f	f	w	f	f	f
f	w	f	w	w	w	f
f	f	f	f	w	w	w

Das ist eine __Definition__, d.h. hiermit legen wir fest, was die Symbole

$\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$

bedeuten sollen.

Anmerkung: Die Aussage $A \Rightarrow B$ ist wahr, wenn A, B beide falsch sind?

Beispiel: „Wenn 5 eine gerade Zahl ist, dann können Katzen fliegen"

hier: A „5 ist eine gerade Zahl" falsch

B „Katzen können fliegen" falsch

Warum legen wir fest, dass in diesem Fall die Aussage $A \Rightarrow B$ wahr ist?
Diese Aussage können wir nur widerlegen, wenn B falsch ist, obwohl A wahr ist.

Verknüpfung von mehreren Aussagen:

Beispiel:

A „n ist eine Primzahl"

B „n ist eine gerade Zahl"

C „$n=2$"

$(A \wedge B) \Leftrightarrow C$ „n ist eine gerade Primzahl genau dann, wenn $n=2$ ist".

w

$\boxed{n=2}$

$\underbrace{w \wedge w}_{w} \Leftrightarrow w$

w

$\boxed{n \neq 2}$

$\left.\begin{array}{l} f \wedge f \\ w \wedge f \\ f \wedge w \end{array}\right\} f \Leftrightarrow f$

w

Quantoren:

$\forall$ bedeutet „für alle"

$\exists$ bedeutet „es existiert"

Beispiele:

- „Zu jeder reellen Zahl x gibt es eine natürliche Zahl n, die größer als x ist."

$$\forall x \in \mathbb{R} \; \exists n \in \mathbb{N} : n > x$$

$\mathbb{R}$: Menge der reellen Zahlen

$\mathbb{N}$: Menge der natürlichen Zahlen

- $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ wahr

„Für alle x aus der Menge der reellen Zahlen gilt $x^2 \geq 0$"

<u>andere Formulierung</u>? $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0$

„Wenn x eine reelle Zahl ist, dann ist $x^2 \geq 0$"

Zurück zu $\underbrace{\forall x \in \mathbb{R}}\ \underbrace{\exists n \in \mathbb{N}}: \underbrace{n > x}$

Für jede reelle Zahl x findet man eine natürliche Zahl n, sodass $n > x$ ist

$\boxed{\text{wahr}}$

<u>andererseits:</u> $\underbrace{\exists n \in \mathbb{N}}\ \underbrace{\forall x \in \mathbb{R}}: \underbrace{n > x}$

$\boxed{\text{falsch}}$

Es gibt eine natürliche Zahl n, sodass für jede reelle Zahl x gilt: $n > x$

Auf die Reihenfolge kommt es an!

abschließendes Beispiel:

- $A \Rightarrow B$

  ist äquivalent zu

- $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$

  und auch zu

- $(\neg A) \vee B$

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \big((\neg B) \Rightarrow (\neg A)\big) \Leftrightarrow \big((\neg A) \vee B\big)$$

Das kann man z.B. mit einer Wahrheitstafel begründen

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$	$(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$	$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg B) \Rightarrow (\neg A))$	...
w	w	w	f	f	w	w	
w	f	f	w	f	f	w	
f	w	w	f	w	w	w	
f	f	w	w	w	w	w	

↑ z.B.

<u>Anmerkung</u>: Eine Aussage, die stets wahr ist, nennt man <u>Tautologie</u>.