# 2. Mengen

Unter einer **Menge** stellen wir uns ein „Objekt" vor, das gewisse „Elemente" enthält. Das ist keine mathematisch präzise Definition, genügt aber für unsere Zwecke.

**Beispiele** (1) $A = \{ 1, \sqrt{2}, \pi, -10^{-6} \}$

Elemente der Menge A

Schreibweisen: $1 \in A$ , $\sqrt{2} \in A$ , $3 \notin A$

„ist Element von"  „ist kein Element von"

(2) $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ Menge der natürlichen Zahlen

Achtung! Gelegentlich wird auch $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ gesetzt.

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ Menge der ganzen Zahlen

$\mathbb{Q} = \{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \}$ Menge der rationalen Zahlen

$\uparrow$

„mit der Eigenschaft" (gelegentlich $:$ statt $\mid$)

$\mathbb{R}$ Menge der reellen Zahlen (mehr dazu später ...)

$\mathbb{C}$ Menge der komplexen Zahlen ($\rightarrow$ Kap 14)

(3) $\{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x \leq 2\} = \{-1, 0, 1, 2\}$

(4) $\{x \in \mathbb{R} \mid 5x^2 - 4x + 2 = 0\}$ Lösungsmenge einer Gleichung

(5) $\{\}$ leere Menge (hat keine Elemente) anderes Symbol dafür: $\emptyset$

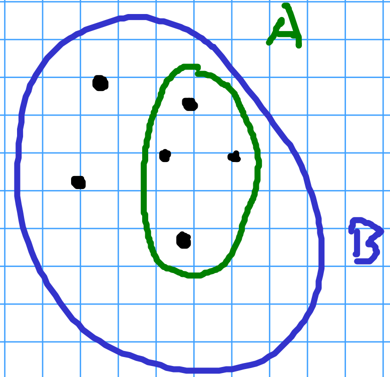
(6) $\{1, 2, \{1,2\}, \{\{\emptyset\}\}, \mathbb{N}\}$

<u>Schreibweisen:</u> Seien $A, B$ zwei Mengen. Wir schreiben

- $A \subseteq B$, falls $A$ Teilmenge von $B$, d.h.

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

oder $$\forall x \in A : x \in B$$



- $A \not\subseteq B$, falls $A$ keine Teilmenge von $B$, d.h. $\exists x \in A : x \notin B$

- $A = B$, falls $A \subseteq B$ und auch $B \subseteq A$

- $A \subsetneq B$, falls $A \subseteq B$ aber $A \neq B$ „$A$ ist echte Teilmenge von $B$"

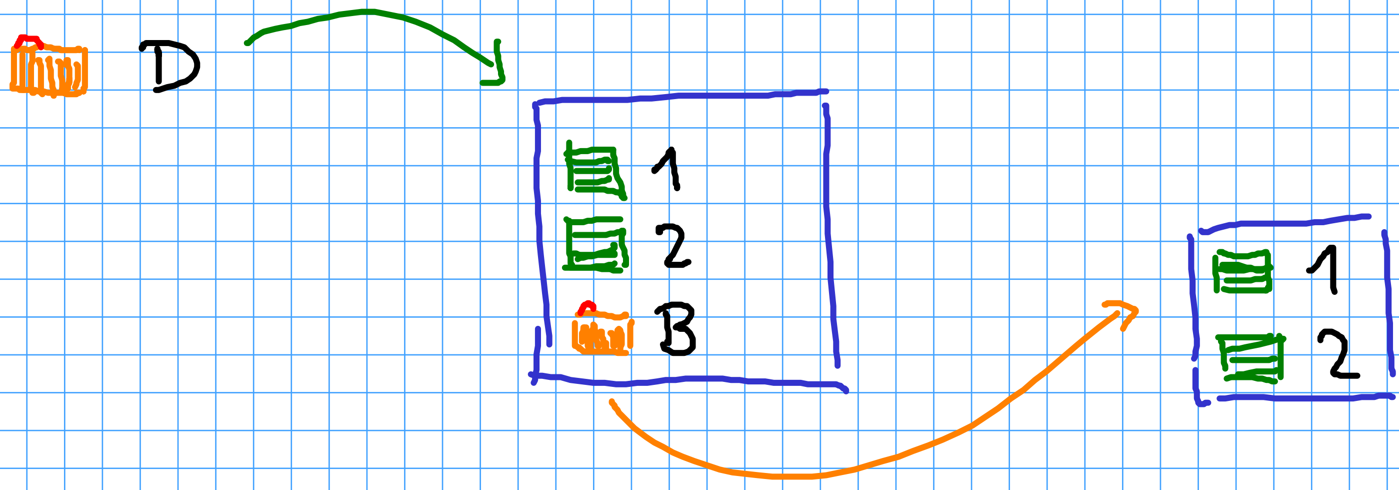
**Achtung:** auch gebräuchlich: $\subset$ statt $\subseteq$

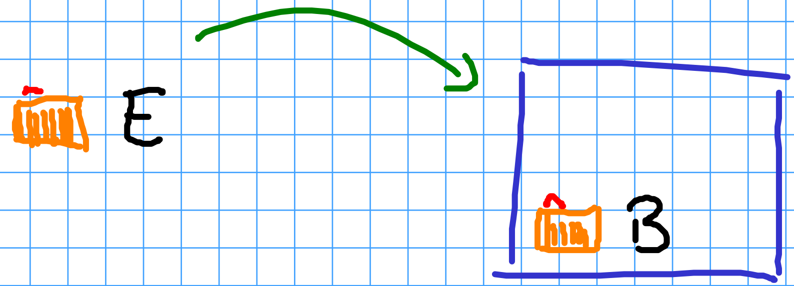
$\subset$ statt $\subsetneq$

**Beispiele:** $A = \{1\}$, $B = \{1,2\}$, $C = \{1,2,3\}$, $D = \{1,2,B\} = \{1,2,\{1,2\}\}$

Es gilt $A \subsetneq B \subsetneq C$, $2 \in B$, $B \subsetneq D$, $B \in D$

$E = \{B\} = \{\{1,2\}\}$. Es ist $2 \notin E$.


D
1
2
B
1
2


E
B

Weiter sei $F = \{1, 2, \{3,4\}\}$

Es ist $3 \notin F$, $3 \in \{3,4\} \in F$

$\{3,4\} \not\subseteq F$, $\{\{3,4\}\} \subsetneq F$

jedes Element der Menge $\{\{3,4\}\}$

(da gibt es nur eines, nämlich $\{3,4\}$)

ist Element von $F$

Die Menge $F$ enthält noch mindestens

ein weiteres Element

# Wie beweist man $A \subseteq B$ formal?

- Sei $x \in A$

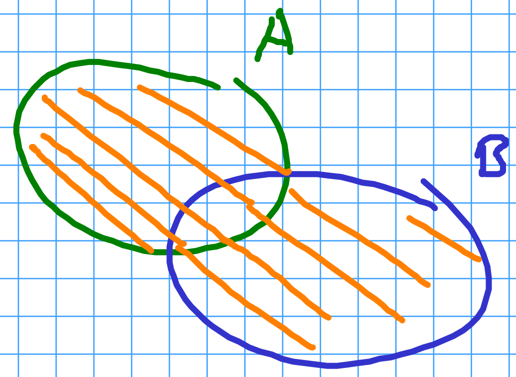
  Dann folgt ...

  Also ist $x \in B$

Standardkonstruktionen: Seien $A, B$ Mengen. Dann heißen

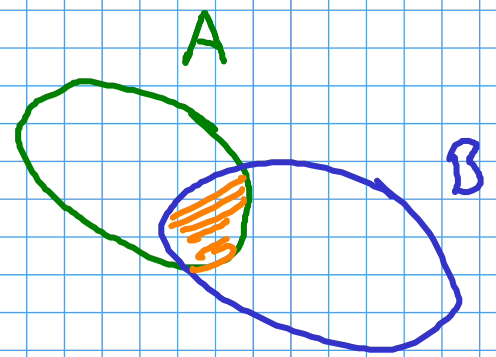
- $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

  die Vereinigung von $A$ und $B$



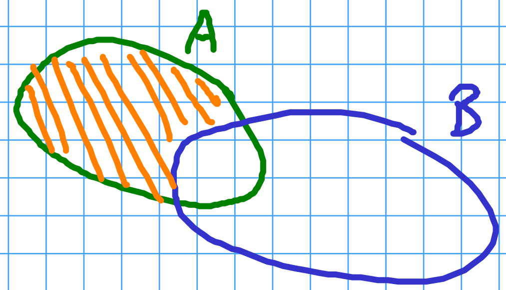

- $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

  der Schnitt von $A$ und $B$

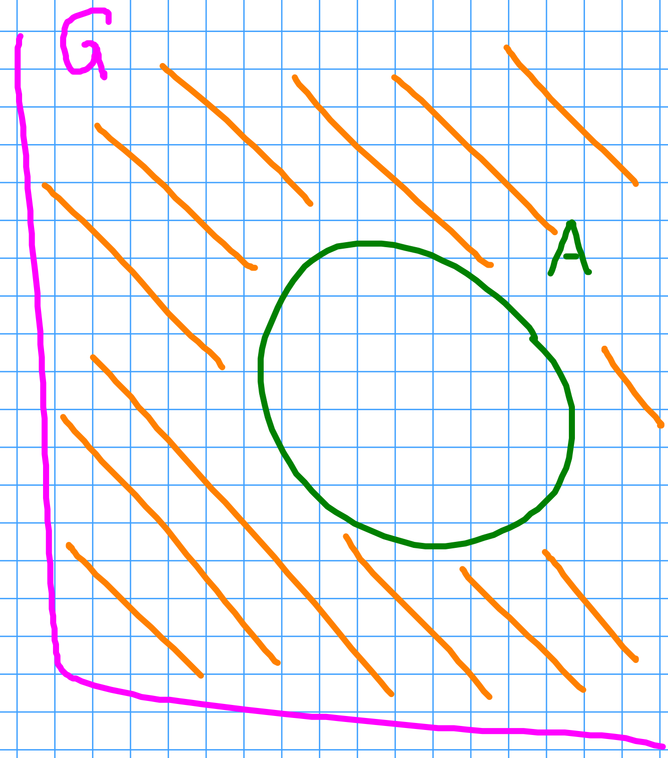



- $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

  die (Mengen-) Differenz von $A$ und $B$



**Das Komplement:** Seien $A$ und $G$ Mengen mit $A \subseteq G$




Dann heißt $C_G(A) = G \setminus A$

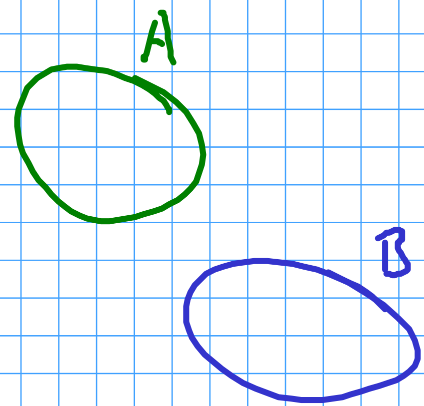
das Komplement von $A$ in $G$

**Beispiel:** $C_{\mathbb{Z}}(\mathbb{N}) = \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ $\qquad C_{\mathbb{N}}(\mathbb{N}) = \emptyset$

$C_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}) = \dots$

Auch gebräuchliche Schreibweisen: $A^c$ oder $\overline{A}$ nur sinnvoll, wenn klar ist, was $G$ ist.

**Definition:** Zwei Mengen $A$ und $B$ heißen **disjunkt**, falls $A \cap B = \emptyset$




Das **kartesische Produkt**: Seien $A$ und $B$ Mengen.
Das kartesische Produkt von $A$ und $B$ ist

$$A \times B = \{ (a,b) \mid a \in A,\ b \in B \}$$

(die Menge aller Paare von Elementen aus $A$ und $B$)

Beispiel: $A = \{1,2,3\}$ , $B = \{3,4\}$

$$A \times B = \{ (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,3)\ (3,4) \}$$

$$B \times A = \{ (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (4,3) \}$$

## abschließende Bemerkungen

Ein Element kann nur einmal in einer Menge enthalten sein

Die Reihenfolge ist unerheblich z.B. $\{1,2\} = \{2,1\}$

$$\mathbb{Q} = \{ \tfrac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \}$$