3 Zahlenmengen

Wir betrachten folgende Mengen

$\mathbb{N} := \{1,2,3,4,\dots\}$ Menge der natürlichen Zahlen

„per definitionem"

Hiermit wird festgelegt, was das Symbol links bedeuten soll

$\mathbb{N}_0 := \{0,1,2,3,\dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$

$\mathbb{Z} := \{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$ Menge der ganzen Zahlen

$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} \;\middle|\; m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$ Menge der rationalen Zahlen

Die Menge $\mathbb{Q}$ ist für uns nicht umfassend genug.

Es gibt <u>kein</u> $x \in \mathbb{Q}$, sodass $x^2 = 2$ ist. Warum? → Übungen

$$\boxed{\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}} \qquad \pi \notin \mathbb{Q}, \quad e \notin \mathbb{Q}, \quad \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$$

Es gilt $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

Menge der reellen Zahlen ($\mathbb{R}$)

Menge der komplexen Zahlen ($\mathbb{C}$)

Im Vorkurs: Keine abstrakte Konstruktion der Menge $\mathbb{R}$ (→ 1. Semester).
Wir wollen uns hier das vorstellen, was wir aus der Schule kennen.

Spezielle Teilmengen reeller Zahlen: Intervalle

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Wir definieren

ebenfalls gebräuchliche Schreibweise:

$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ $\qquad]a,b[$

$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ $\qquad]a,b]$

$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ $\qquad [a,b[$

Weiter sei

$[a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$ $\qquad [a,\infty[$

$(a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ $\qquad]a,\infty[$

$(-\infty,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$ $\qquad]-\infty,b]$

$(-\infty,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$ $\qquad]-\infty,b[$

Definition (Potenzen): Für $a \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, definieren wir

(1) $$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ Faktoren}}$$

(2) $a^0 := 1$ (damit gilt $a^n = a^{n-1} \cdot a$ auch für $n = 1$)

(3) Falls $a \neq 0$ setzen wir $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$

(4) Falls $a \geq 0$ setzen wir $a^{1/n} := \sqrt[n]{a}$

(5) Falls $a \geq 0$ setzen wir $a^{m/n} := \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

Damit ergibt sich $a^{x+y} = a^x a^y$ für $a > 0$ und $x, y \in \mathbb{Q}$

Was ist a^x, wenn $x \notin \mathbb{Q}$ ist? Mehr dazu im 1. Semester

<u>Schreibweisen:</u> Für $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, schreibt man

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i := a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

<u>Beispiele:</u> $1 + 2 + 3 + \dots + 100 = \sum_{i=1}^{100} i$

$$\sum_{k=1}^{4} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$\sum_{i=1}^{10} 1 = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{10 \text{ Stück}} = 10$$

Wir setzen $\sum_{i=1}^{0} a_i :\overset{!}{=} 0$ „leere Summe"

Warum?

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + a_{n+1}$$

hier $n=0$ einsetzen

$$\sum_{i=1}^{1} a_i = \left(\sum_{i=1}^{0} a_i\right) + a_1$$

$$a_1 = \; ? \; + a_1$$

$:\overset{!}{=} 0$

analog $\prod_{i=1}^{0} a_i := 1$ „leeres Produkt"

Die Menge der natürlichen Zahlen hat einige „schöne" Eigenschaften:

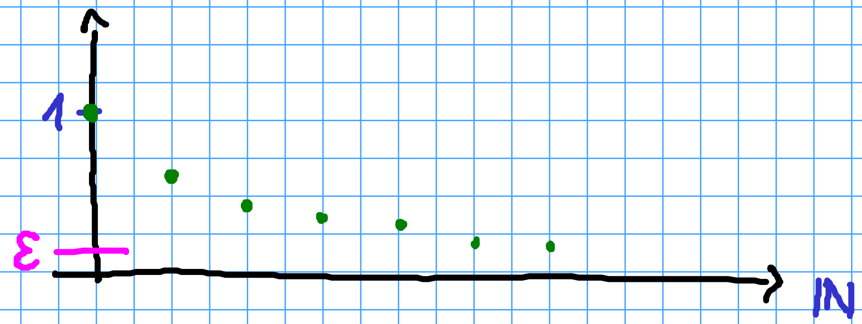
(1) Jedes $n \in \mathbb{N}$ hat einen „Nachfolger" $n+1 \in \mathbb{N}$.

(2) Es gibt eine kleinste natürliche Zahl, nämlich die 1

(3) Die natürlichen Zahlen „werden beliebig groß"

$$\forall x \in \mathbb{R} \; \exists n \in \mathbb{N} : n > x$$ Archimedisches Prinzip

(4) $\forall \varepsilon \in (0,\infty) \; \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$



Auf (1) und (2) beruht das Beweisprinzip der <u>vollständigen Induktion</u>.

Seien $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$, ... Aussagen (von denen wir beweisen wollen, dass sie wahr sind)

[Beispiel: $A(n)$ lautet $1+2+\ldots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$

$A(1)$: $1 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+1)$

$A(2)$: $1+2 = \frac{1}{2}\,2\,(2+1)$

$\vdots$]

Wenn wir begründen können, dass

- $A(1)$ wahr ist
- Falls irgendein $A(n)$ wahr ist, dann folgt, dass auch $A(n+1)$ wahr ist.

Dann ist $A(n)$ wahr für jedes $n\in\mathbb{N}$.

In obigem Beispiel:

- $A(1)$ ist wahr, denn $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1)$

- $\boxed{\text{Wenn es } n \in \mathbb{N} \text{ gibt, sodass } A(n) \text{ wahr ist}}$, dann

$$\boxed{\boxed{1+2+\dots+n} + (n+1)} = \boxed{\frac{1}{2} \cdot n(n+1)} + (n+1)$$

$$= \left(\frac{1}{2} \cdot n + 1\right)(n+1)$$

$$= \frac{1}{2}(n+2)\,(n+1)$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)}$$

Also: Wenn $\boxed{A(n)}$ wahr ist, dann ist auch $\boxed{A(n+1)}$ wahr.

<u>Insgesamt</u>: $A(1)$ ist wahr (haben wir nachgerechnet)

Induktions-anfang

Wenn $\boxed{A(1)}$ wahr ist, dann ist auch $\boxed{A(2)}$ wahr.

Induktions-schritt

Jetzt wissen wir, dass $A(2)$ wahr ist.

Wenn $\boxed{A(2)}$ wahr ist, dann ist auch $\boxed{A(3)}$ wahr

Jetzt wissen wir, dass $A(3)$ wahr ist.

Wenn $\boxed{A(3)}$ wahr ist, dann ist auch $\boxed{A(4)}$ wahr.

$\vdots$