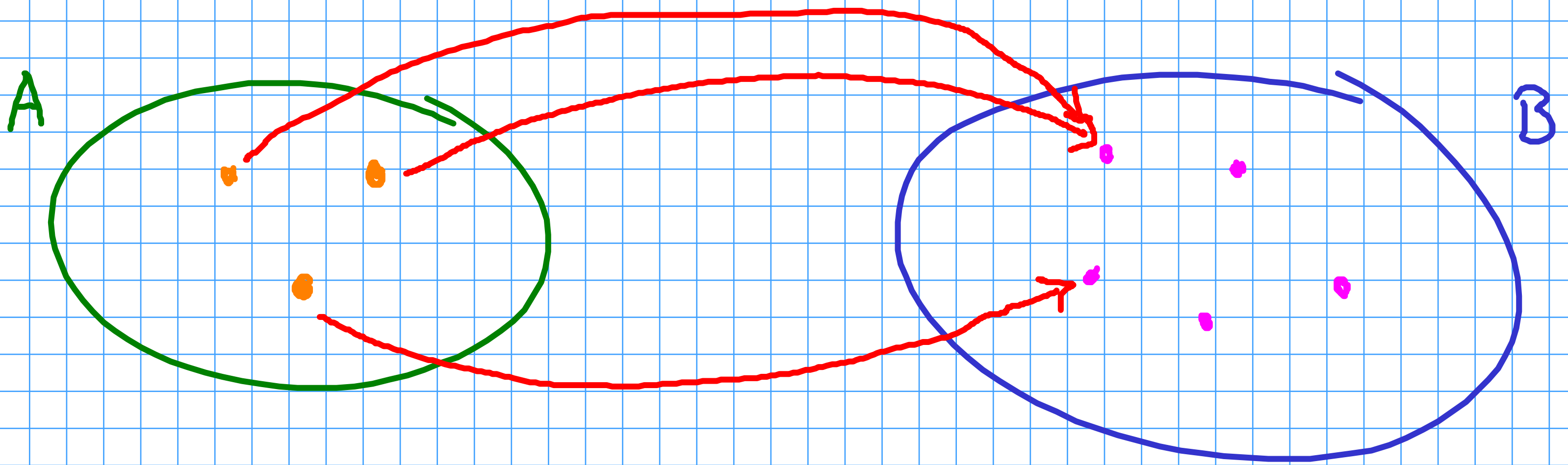
4 Abbildungen

Sei A, B Mengen. Unter einer Abbildung (oder Funktion) f von A nach B verstehen wir eine Vorschrift, die jedem Element aus der Menge A genau ein Element aus der Menge B zuordnet.



Schreibweisen: $f: A \to B \;,\quad a \longmapsto f(a) \qquad a \in A \;, f(a) \in B$

oder $\quad f: \begin{cases} A \to B \\ a \mapsto f(a) \end{cases}$

Beispiele: (1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;, \quad x \longmapsto x^2$

andere Schreibweise: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;, \; f(x) := x^2$

(2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;, \quad f(x) := \sin(x)$

(3) f: Menge der Sitze im Hörsaal $\longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Sitz $\longmapsto$ (Reihennummer, Platznummer)

(4) Sei A eine Menge $\quad id_A : A \to A \,, \quad a \mapsto a$

Identität

(5) $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,, \quad x \mapsto |x|$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Zurück zum ersten Beispiel $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,, \quad f(x) := x^2$

nicht jedes Element „wird getroffen"

z.B. gibt es kein $x \in \mathbb{R}$, sodass $f(x) = -2$ ist.

verschiedene Elemente aus der „linken Menge"

haben den selben „Partner in der rechten Menge"

z.B. $f(2) = 4$ und $f(-2) = 4$

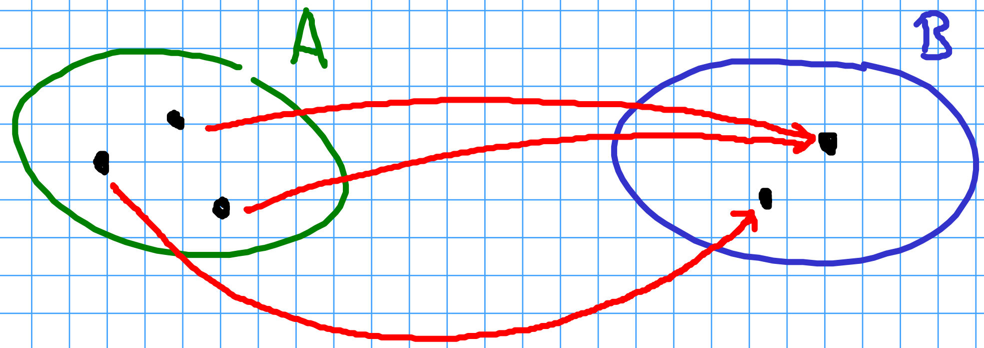
Definitionen: Es seien A und B Mengen, $f: A \to B$ eine Abbildung

- Wir nennen A den Definitionsbereich und B den Wertebereich von f.
- Die Abbildung f heißt injektiv, wenn für $a, a' \in A$ mit $a \neq a'$ stets $f(a) \neq f(a')$ gilt.

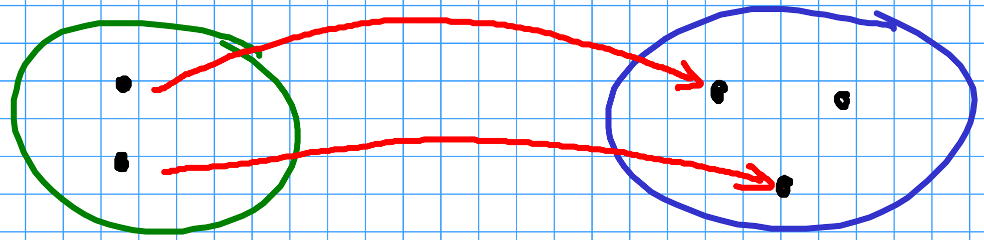
  In Formeln: $$(f: A \to B \text{ injektiv}) \Longleftrightarrow (\forall a, a' \in A: a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a'))$$
  $$\Longleftrightarrow (\forall a, a' \in A: f(a) = f(a') \Rightarrow a = a')$$

- Die Abbildung f heißt surjektiv, wenn zu jedem $b \in B$ mindestens ein Element $a \in A$ existiert, sodass $b = f(a)$ ist.

  In Formeln: $$(f: A \to B \text{ ist surjektiv}) \Longleftrightarrow (\forall b \in B\ \exists a \in A: b = f(a))$$
- Eine Abbildung heißt bijektiv, wenn sie surjektiv und injektiv ist.



surjektiv, nicht injektiv



injektiv, nicht surjektiv

Nochmal zum ersten Beispiel:

$$f:\begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ x \mapsto x^2\end{cases}$$

weder injektiv noch surjektiv

Zur Abkürzung setzen wir $\mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

Betrachte

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$$ ist surjektiv, nicht injektiv

$$h : \begin{cases} \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$$ ist bijektiv

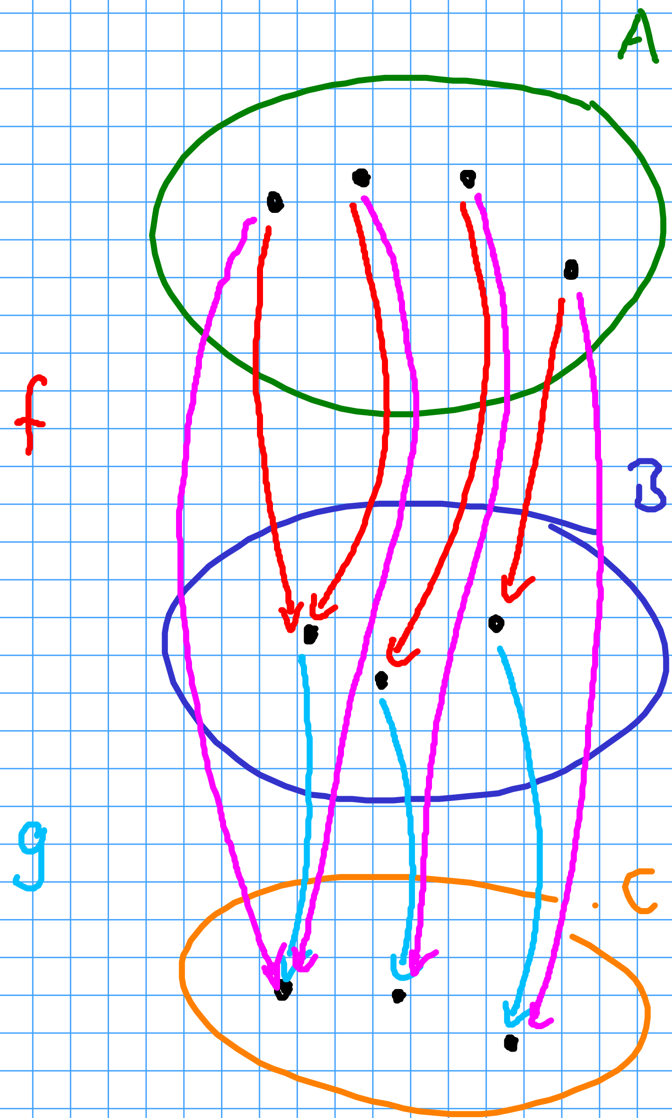
Die Eigenschaften „surjektiv", „injektiv", „bijektiv" hängen maßgeblich von Definitions- und Wertebereich ab.

Komposition von Abbildungen

Seien $f: A \to B$, $g: B \to C$ zwei Abbildungen.

Dann heißt $g \circ f: A \to C \quad x \mapsto g(f(x))$

die Verknüpfung oder Komposition von f und g.



Beispiel:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ , \qquad f(x) = x^2$$

$$g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} , \qquad g(y) = \frac{1}{1+y}$$

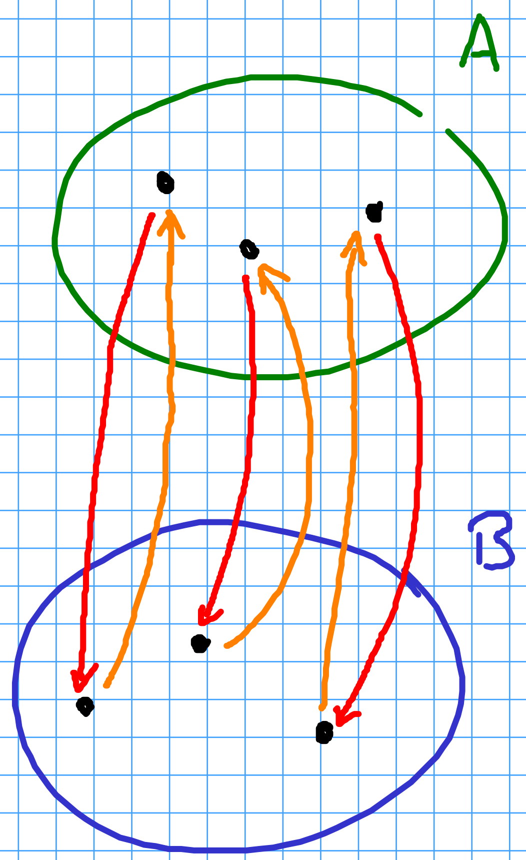
Dann ist $\quad g \circ f\,(x) = g\big(f(x)\big) = g(x^2) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Satz und Definition

Eine Abbildung $f: A \to B$ ist bijektiv genau dann, wenn eine Abbildung $g: B \to A$ existiert mit der Eigenschaft $g \circ f = id_A$ und $f \circ g = id_B$.

In diesem Fall ist g eindeutig bestimmt und heißt Umkehrabbildung oder Umkehrfunktion von f.

Man schreibt auch f^{-1} statt g.



$$\left(f: A \to B \text{ ist bijektiv} \right) \Leftrightarrow \left(\exists g: B \to A : \quad g \circ f = id_A \wedge f \circ g = id_B \right)$$

Beispiele:

(1) $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $f(x) := x^2$ ist bijektiv

Umkehrabbildung $g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ $g(y) = \sqrt{y}$

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, $f(x) := x^2$ ist nicht injektiv

$g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $g(y) := \sqrt{y}$ ist nicht surjektiv

Hier ist $g \circ f\,(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$

also $g \circ f \neq id_{\mathbb{R}}$

und $f \circ g\,(y) = f(g(y)) = f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$

also $f \circ g = id_{\mathbb{R}_0^+}$

(3) Wir setzen $\mathbb{R}^- := \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

und betrachten $f: \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^-$ $\quad f(x) := -x^2 + 2x$

Nebenrechnung

$$
\begin{aligned}
y = -x^2 + 2x \iff x^2 - 2x &= -y \\
\iff x^2 - 2x + 1 &= -y + 1 \\
\iff (x-1)^2 &= -y + 1 \\
\iff x - 1 &= \pm\sqrt{-y+1} \\
\iff x &= \pm\sqrt{-y+1} + 1
\end{aligned}
$$

Vermutung: Die Umkehrabbildung lautet $g: \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^-$, $g(y) = -\sqrt{-y+1} + 1$

Rechne nach $\quad g(f(x)) = x$, $f(g(y)) = y$ (selbst machen!)

Letztes Beispiel für dieses Kapitel:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad f(n) := \begin{cases} \frac{n}{3} & \text{falls } n \text{ durch } 3 \text{ teilbar ist} \\ 3n+1 & \text{sonst} \end{cases}$$

- f ist surjektiv, denn zu jedem $k \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f(n) = k$, nämlich $n = 3k$

- f ist nicht injektiv, denn es gibt n und n' mit $n \neq n'$, aber $f(n) = f(n')$, z.B. $f(1) = 4$, $f(12) = 4$