5. Gleichungen und Ungleichungen

Beispiele: (1) Gesucht ist eine reelle Zahl x derart, dass $3x-5=7$ ist.

Wir formen um

$$\begin{aligned} 3x-5 &= 7 \\ \Longleftrightarrow \quad 3x &= 12 \\ \Longleftrightarrow \quad x &= 4 \end{aligned}$$

(2) Suche Lösungen der Gleichung $x^2-3=6$

$$\begin{aligned} x^2-3 &= 6 \\ \Longleftrightarrow \quad x^2 &= 9 \\ \Longleftrightarrow \quad (x &= 3) \vee (x=-3) \end{aligned}$$

kurz: $x = \pm 3$

$$x^2 - 3 = 6$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 = 9$$

$$\Leftarrow \quad x = 3$$

$$x^2 - 3 = 6$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \pm 3$$

wichtig

(3) Bestimme Lösungen von $|x^3 - 10x| = 6x$

Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann ist $|a| = \begin{cases} a & \text{, falls } a \geq 0 \\ -a & \text{sonst} \end{cases}$

1. Fall $x^3 - 10x \geq 0$ In diesem Fall müssen wir die Gleichung $x^3 - 10x = 6x$ lösen

Es ist $x^3 - 10x = 6x \iff x^3 = 16x \iff (x^2 = 16 \lor x = 0)$

$\iff (x = 4) \lor \cancel{(x = -4)} \lor (x = 0)$

erfüllt nicht obige Bedingung!

2. Fall $x^3 - 10x < 0$ In diesem Fall müssen wir die Gleichung $-x^3 + 10x = 6x$ lösen

Es ist $-x^3 + 10x = 6x \iff -x^3 = -4x \iff (x = 2) \lor \cancel{(x = -2)} \lor \cancel{(x = 0)}$

Insgesamt haben wir $|x^3 - 10x| = 6x \iff (x=4) \vee (x=2) \vee (x=0)$

$$\iff x \in \underbrace{\{0,2,4\}}_{\text{Lösungsmenge der Gleichung}}$$

(4) Suche diejenigen $x \in \mathbb{R}$, sodass $\dfrac{2-3x}{4x+5} \geq 2$ gilt.

<u>1. Fall</u> $4x+5 > 0$ $\left(\iff x > -\frac{5}{4}\right)$ ← nur in diesem Fall

Hier gilt $\dfrac{2-3x}{4x+5} \geq 2 \iff 2-3x \geq 2(4x+5) \iff -11x \geq 8 \iff x \leq -\frac{8}{11}$

<u>2. Fall</u> $4x+5 < 0$ $\left(\iff x < -\frac{5}{4}\right)$ ← nur in diesem Fall (unmöglich!)

Hier gilt $\dfrac{2-3x}{4x+5} \geq 2 \iff 2-3x \leq 2(4x+5) \iff -\frac{8}{11} \leq x$

Insgesamt: Die Lösungsmenge ist $\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{5}{4} < x \leq -\frac{8}{11}\} = (-\frac{5}{4}, -\frac{8}{11}]$

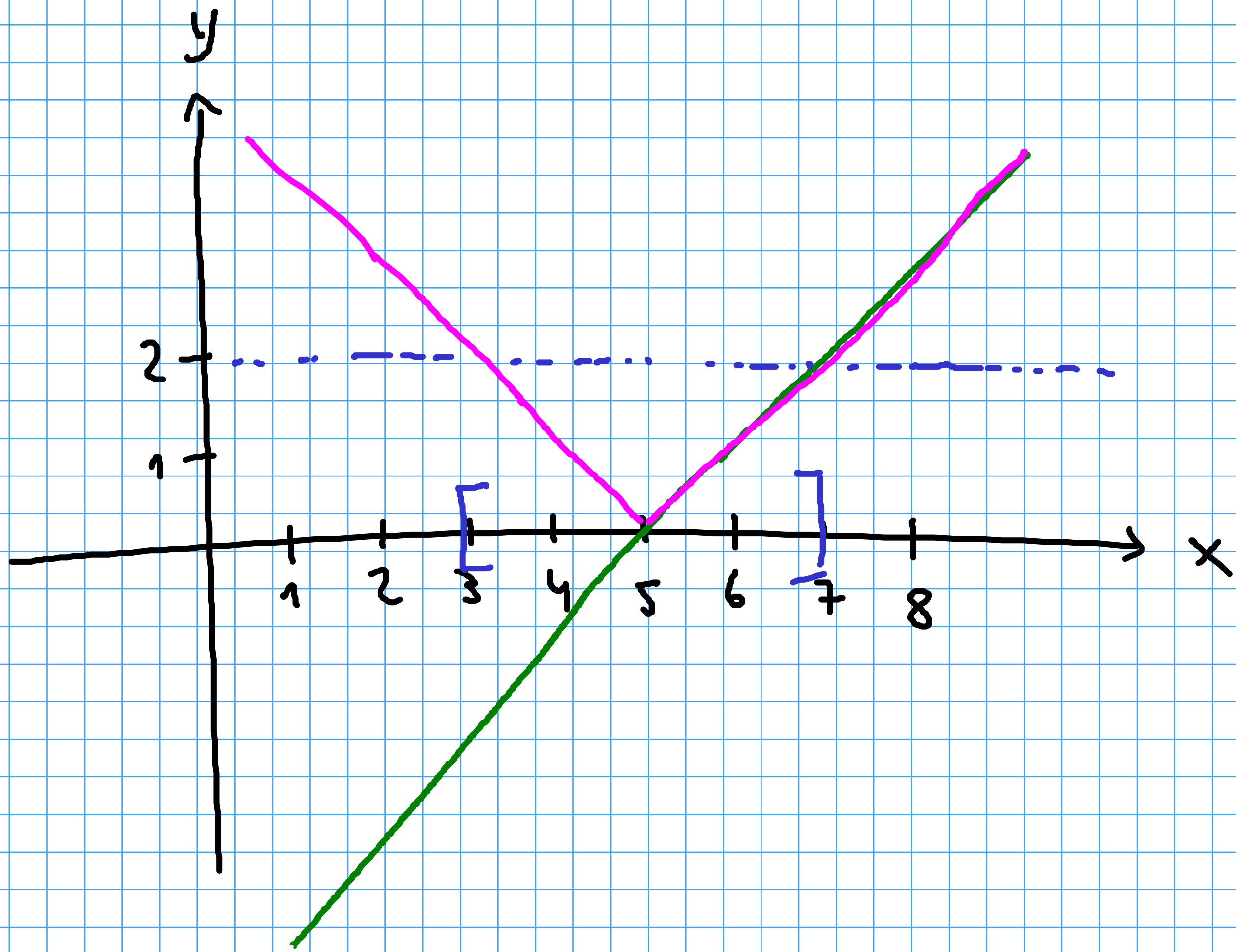
(3) Löse $|x-5| \leq 2$

Es ist $|x-5| \leq 2 \iff (x-5 \geq 0 \wedge x-5 \leq 2) \vee (x-5 < 0 \wedge -x+5 \leq 2)$

$\iff (x \geq 5 \wedge x \leq 7) \vee (x < 5 \wedge x \geq 3)$

$\iff 3 \leq x \leq 7$

Die Lösungsmenge ist das Intervall $[3,7]$



$y = x-5$

$y = |x-5|$

Systeme mehrerer Gleichungen

Beispiele: (1)

$$3x + 2y = 9$$
$$4x - y = 1$$

Wir suchen zwei reelle Zahlen x, y sodass beide Gleichungen zugleich erfüllt sind.

- Wir haben $4x - y = 1 \iff y = 4x - 1$
- Wenn $y = 4x - 1$ ist, dann folgt aus der ersten Gleichung

$$3x + 2(4x-1) = 9$$

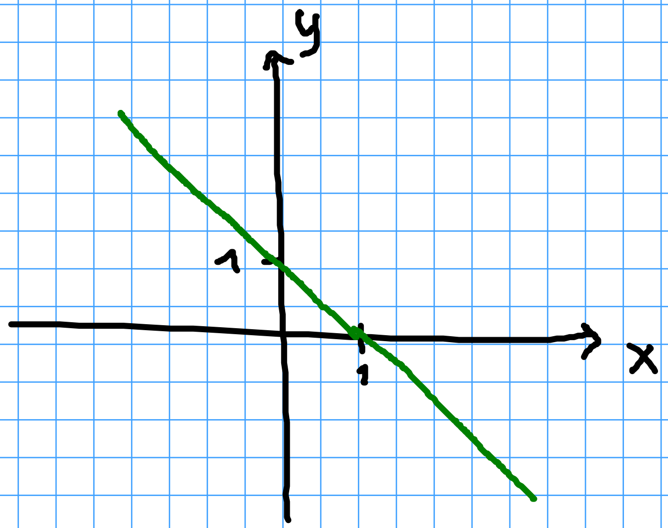
- Es gilt $3x + 2(4x-1) = 9 \iff 11x = 11 \iff x = 1$
- Nach wie vor ist die zweite Gleichung nur dann erfüllt, wenn $y = 4x - 1$ ist. Zusammen mit $x = 1$ ergibt sich $y = 3$.

(2) $$\left.\begin{aligned} x+y&=4 \\ 2x+2y&=5 \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} x+y&=4 \\ x+y&=\tfrac{5}{2} \end{aligned}\right.$$

Es gibt keine solchen x und y !

Eine Gleichung, zwei Unbekannte:

Beispiel: Suche alle $x,y \in \mathbb{R}$, sodass $x+y=1$ gilt



Die Lösungsmenge ist

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x+y=1\}$$

$$=\{(x,1-x) \mid x\in\mathbb{R}\}$$

Lineare Gleichungssysteme

Gesucht sind $x_1, x_2, \dots, x_n$, die zugleich folgende Gleichungen erfüllen

$$\boxed{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}}$$

mit gegebenen $n, m \in \mathbb{N}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $b_j \in \mathbb{R}$

Man nennt dies ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen in n Unbekannten.

Beispiel:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 9 \\ 4x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}$$

(vorhin schon gelöst)

Anmerkungen: In den Fällen $n=2$ oder $n=3$ ist es oft bequemer, statt x_1, x_2, x_3 einfach x, y, z zu schreiben.

Man kann zeigen, dass ein lineares Gleichungssystem entweder keine oder genau eine oder unendlich viele Lösungen hat.