7. Folgen und Reihen

Was ist gemeint?

Hier aus dem Kontext klar?

Beispiel: Betrachte die Zahlenfolge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

besser: Benenne die Folgenglieder mit a_n und gib an, wie man diese zu bestimmen hat, also etwa

$$a_n := \frac{1}{n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

weitere Beispiele:

(1) $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ $\qquad 2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \frac{625}{256}, \ldots$

(2) $a_n := (-1)^n$ $\qquad -1, 1, -1, 1, \ldots$

Schreibweisen: Man kann auch $a(n)$ statt a_n schreiben.

Eine Folge reeller Zahlen ist nichts weiter als eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Gebräuchlich ist auch die Notation $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder kurz $(a_n)_n$

$(a_n)_n$ Die Folge a_1, a_2, a_3

a_n Das n-te Glied der Folge

Weitere Beispiele: (1) $a_1 := 3$, $a_{n+1} := 2a_n$ $3, 6, 12, 24, \ldots$

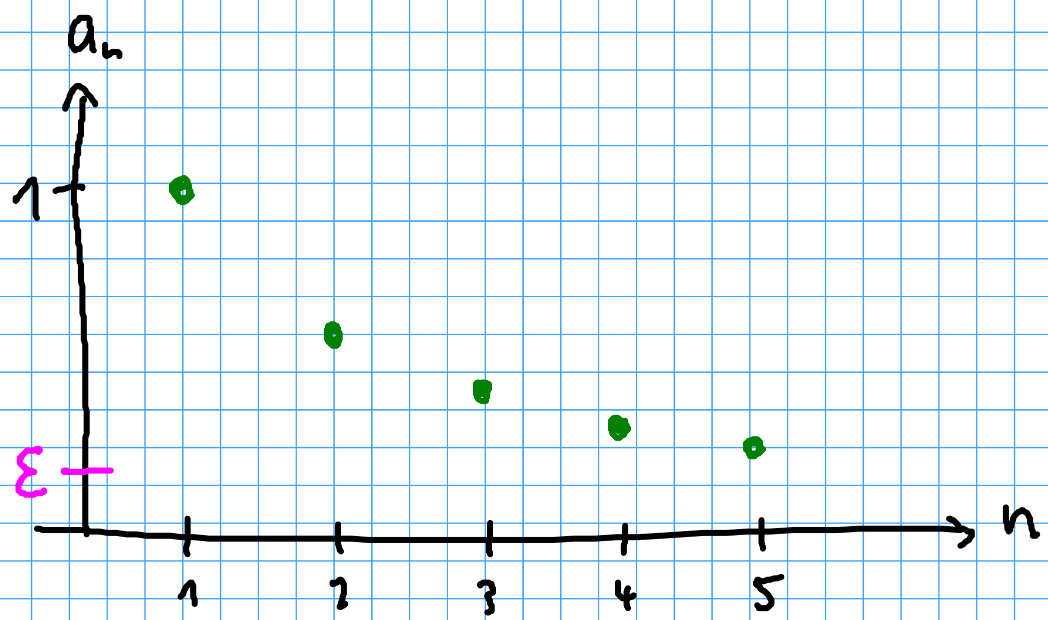
rekursiv erklärte Folge (d.h. mittels einer Vorschrift, wie man das $(n+1)$-te Folgenglied aus dem n-ten bestimmen soll.)

(2) $a_1 := 1 \quad , \quad a_2 := 1 \quad , \quad a_{n+2} := a_{n+1} + a_n$

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$

Zurück zu $a_n = \frac{1}{n}$ $\quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

„Mit wachsendem n nähern wir uns der Null an"



Genauer: Wenn ε beliebige positive reelle Zahl ist, dann finden wir ein $a_n < \varepsilon$ und alle weiteren Folgenglieder sind $< \varepsilon$

<u>ähnliche Überlegung</u>: $a_n := \frac{2n+3}{3n-1}$ $\frac{5}{2}, \frac{7}{5}, \frac{9}{8}, \frac{11}{11}, \frac{13}{14}, \dots$

hier ist $a_n > 0$ und $a_{n+1} < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

man sagt, die Folge ist monoton fallend

Sei $a := \frac{2}{3}$. Betrachte den Abstand $a_n - a$

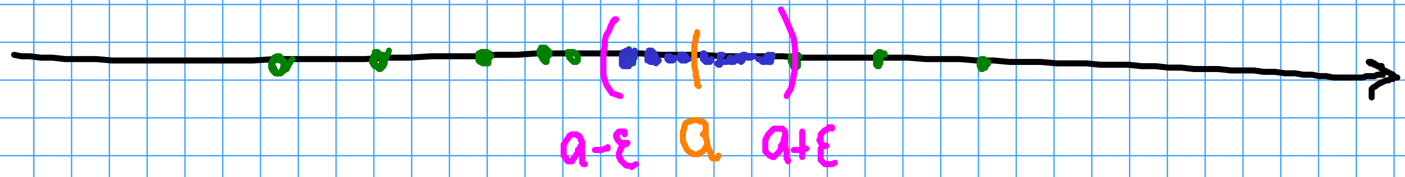
Es ist $a_n - a = \frac{2n+3}{3n-1} - \frac{2}{3} = \frac{(2n+3)\cdot 3 - 2(3n-1)}{(3n-1)\cdot 3} = \frac{11}{9n-3} \underset{3 \leq 3n}{\leq} \frac{11}{9n-3n} = \frac{11}{6} \cdot \frac{1}{n}$

Für „Kenner": Formale Definition:

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $a \in \mathbb{R}$.

Man sagt, die Folge konvergiert gegen a, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$



Man schreibt $a_n \to a \quad (n \to \infty)$ oder $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a}$

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

- $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{3n-1} = \frac{2}{3}$

- $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

$2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \frac{625}{256}, \ldots$

Eulersche Zahl ($\to$ 1. Semester)

<u>Rechenregeln:</u> Seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ Folgen mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$

Dann gilt

(1) $a_n + b_n \longrightarrow a+b$

(2) $a_n b_n \longrightarrow ab$

(3) $\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{a}{b}$ falls $b_n, b \neq 0$

(4) $\sqrt{a_n} \longrightarrow \sqrt{a}$ falls $a_n, a \geq 0$

Bemerkungen: Eine Zahlenfolge kann höchstens einen Grenzwert haben.

Falls kein Grenzwert existiert, sagt man die Folge <u>divergiert</u> (oder: ist divergent)

Nochmal zu $a_n = \frac{2n+3}{3n-1} = \frac{2+\frac{3}{n}}{3-\frac{1}{n}} \longrightarrow \frac{2+0}{3-0} = \frac{2}{3}$

Weitere Beispiele:

- $a_n = \frac{n^3-4n^2+1}{n^3+n} = \frac{1-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^2}} \longrightarrow \frac{1-0+0}{1+0} = 1$

- $a_n = \frac{n^2-4n+1}{n^3+n} = \frac{\frac{1}{n}-\frac{4}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^2}} \longrightarrow \frac{0-0+0}{1+0} = 0$

Reihen: Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Aufgabe: „zähle zusammen"

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots \quad = \;?$$

(„Summe mit unendlich vielen Summanden")

Konstruiere

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

allgemein

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \quad = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

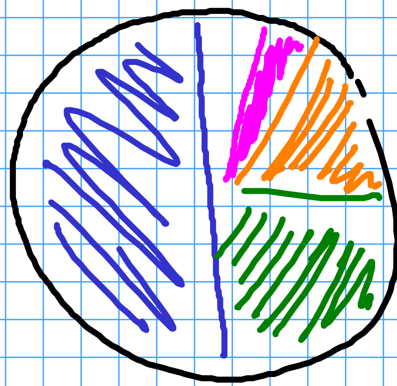
Falls $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ existiert, schreibt man $s = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$

und bezeichnet dies als eine konvergente Reihe

s_n heißt n-te Partialsumme der Reihe

<u>Beispiele</u>:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1$$



$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$ divergiert

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

Für $k \in \mathbb{N}$ sei $k! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$

$0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 1 \cdot 2 = 2$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$4! = 24$

$5! = 120$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots = e$$

$k! \cdot (k+1) = (k+1)!$

$0! \cdot (0+1) = (0+1)!$

$\boxed{0!} \cdot 1 = 1$