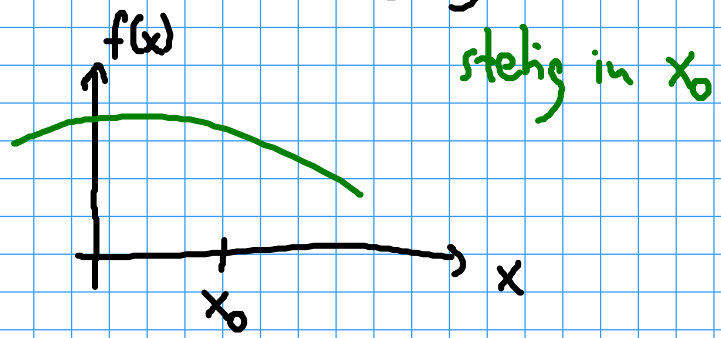
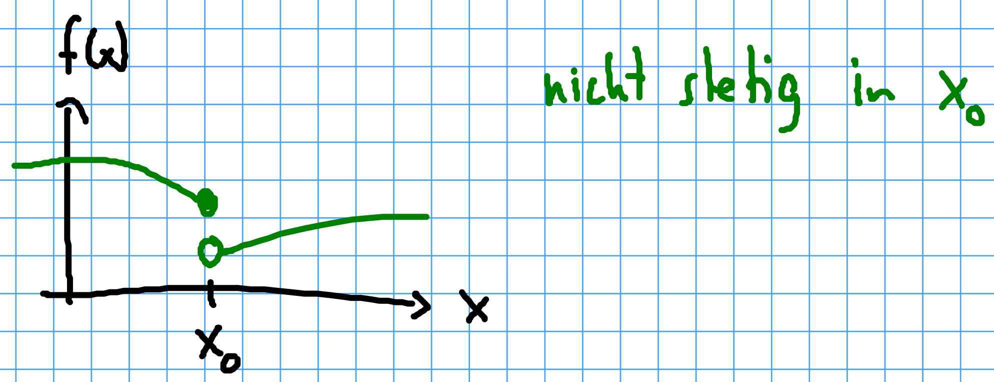
8 Stetigkeit

Wir betrachten eine Funktion (= Abbildung) $f: D \to \mathbb{R}$ $(D \subseteq \mathbb{R})$

- anschauliche Überlegung





- Wie kann man das mathematisch exakt beschreiben?

Definition: Die Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ ist <u>stetig</u> in $x_0 \in D$ genau dann, wenn für <u>jede</u> Folge $(x_n)_n$ in D, die gegen x_0 konvergiert, stets auch die Folge der Funktionswerte $(f(x_n))_n$ gegen $f(x_0)$ konvergiert

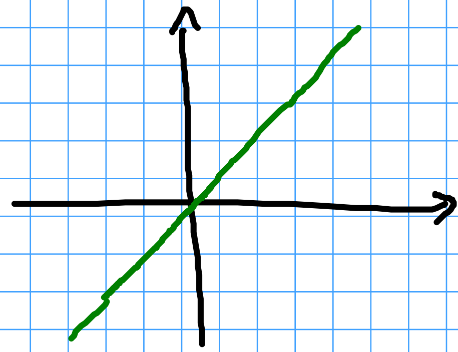
Bemerkungen: (1) Ist f stetig in allen Punkten $x_0 \in D$, so sagt man

<u>f ist stetig auf D</u>.

(2) Wenn f in x_0 stetig ist, schreibt man $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

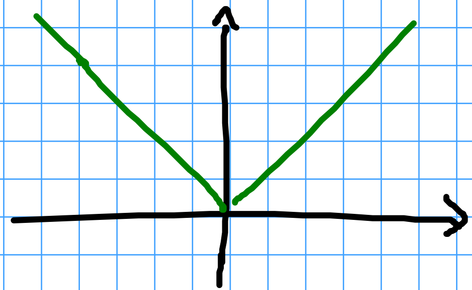
Beispiele: (1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$

ist stetig



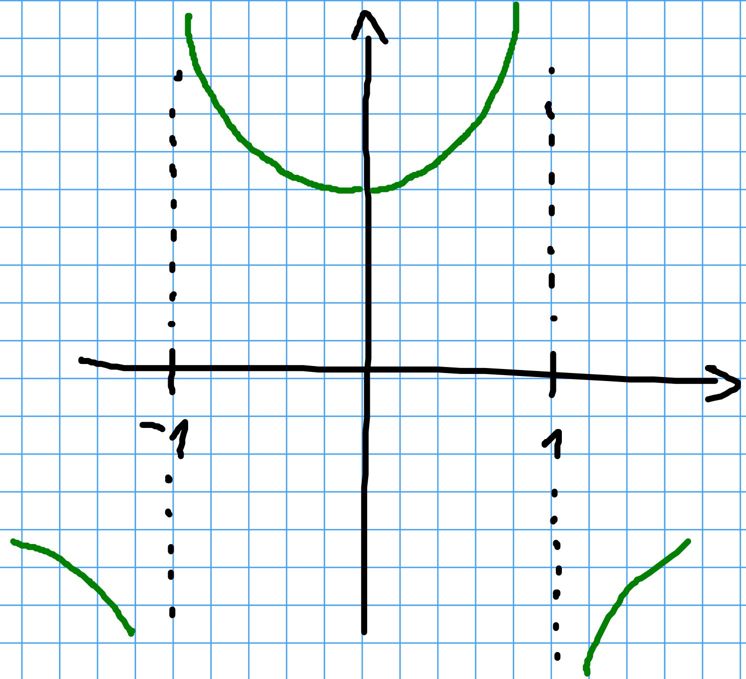
(2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$

ist stetig



(3) $f: \mathbb{R}\setminus\{-1,1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

ist stetig auf $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$



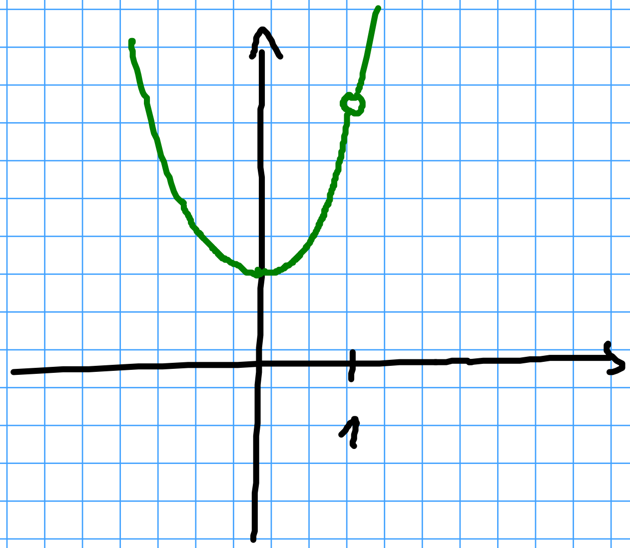
$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existiert nicht

$1 \notin D$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

ist sinnvoll für jedes $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$

(4) $f: \mathbb{R}\setminus\{1\} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = \dfrac{x^3-1}{x-1}$



An der Stelle $x=1$ ist obiger Ausdruck nicht definiert,

<u>aber</u> $\quad f(x) = \dfrac{x^3-1}{x-1} = \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$

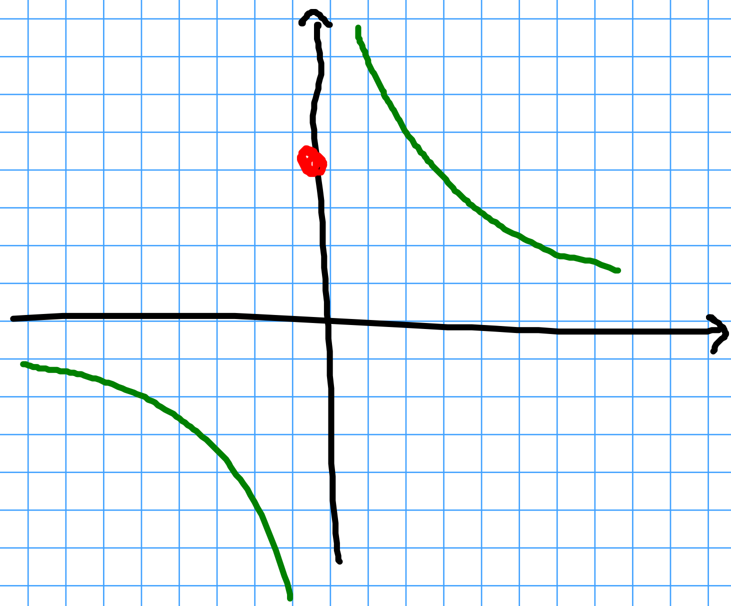
$$= x^2+x+1$$

Wenn wir $f(1)=3$ setzen, erhalten wir eine auf ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktion.

Man sagt, f ist <u>stetig fortsetzbar</u>.

(5) $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}$

- ist stetig auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$
- ist nicht stetig fortsetzbar

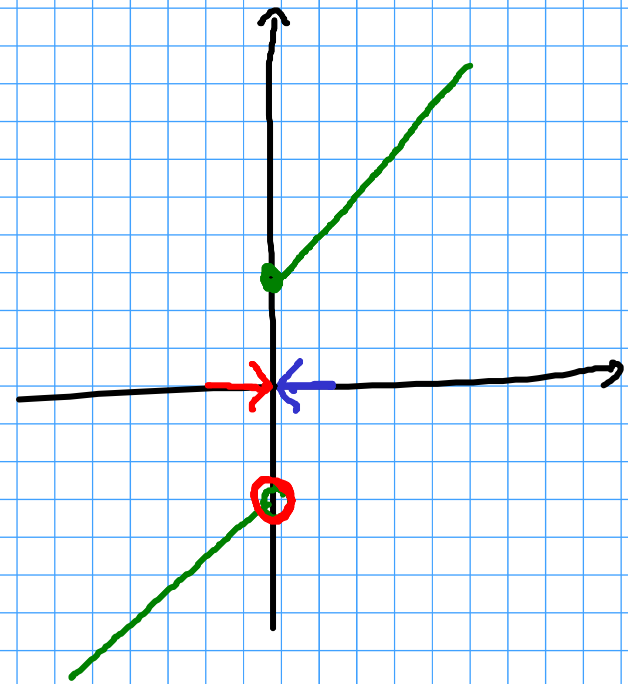


$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ ? & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

Einseitige Grenzwerte

Beispiel: Die Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ ,\ f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{für } x\geq 0 \\ x-1 & \text{für } x<0 \end{cases}$$



- ist stetig auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ und nicht stetig im Nullpunkt

- Für jede Folge $(x_n)_n$ mit $x_n>0$ und $x_n\to 0$ gilt $f(x_n)=x_n+1 \longrightarrow 1 = f(0)$

- Für jede Folge $(x_n)_n$ mit $x_n<0$ und $x_n\to 0$ gilt $f(x_n)=x_n-1 \longrightarrow -1 \neq f(0)$

Man schreibt in diesen Fällen

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{x \uparrow 0} f(x) = -1$$

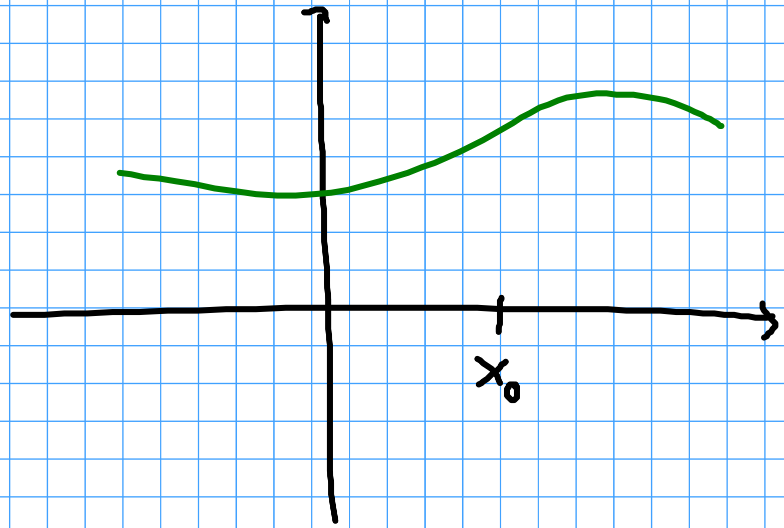
oder

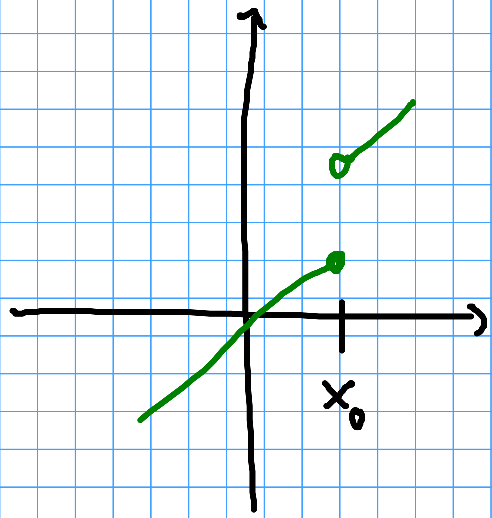
$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = 1 \qquad \lim_{x \nearrow 0} f(x) = -1$$

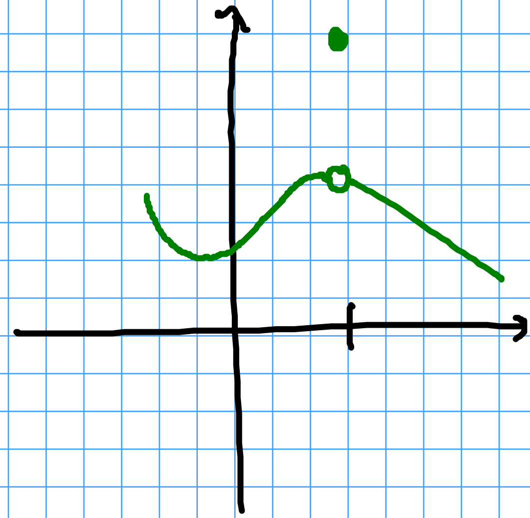
Dies bezeichnet man als rechts- / linksseitigen Grenzwert

<u>Satz</u>: Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ ist stetig in $x_0 \in D$ genau dann, wenn $\lim_{x \uparrow x_0} f(x)$ und $\lim_{x \downarrow x_0} f(x)$ existieren und mit $f(x_0)$ übereinstimmen

(falls x_0 nicht Randpunkt von D ist)





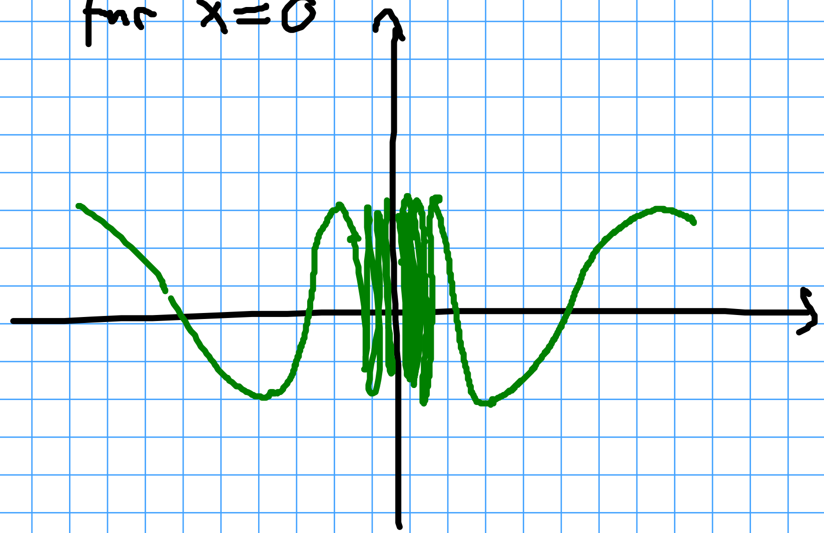


$$\lim_{x\uparrow x_0} f(x) = \lim_{x\downarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

Ausblick:

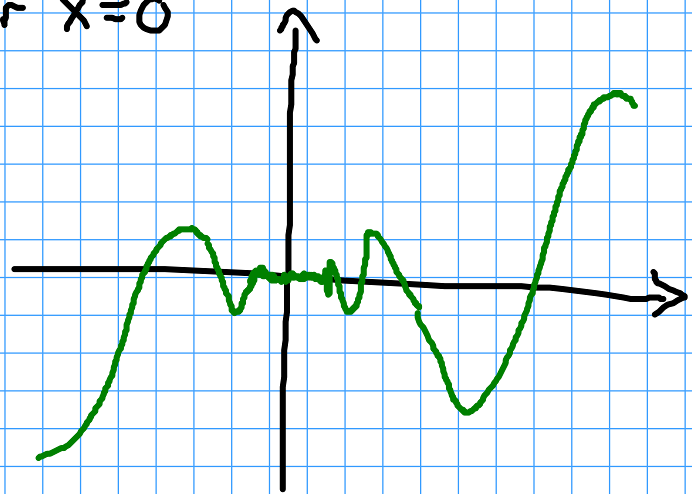
(1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

ist nicht stetig im Nullpunkt



(2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

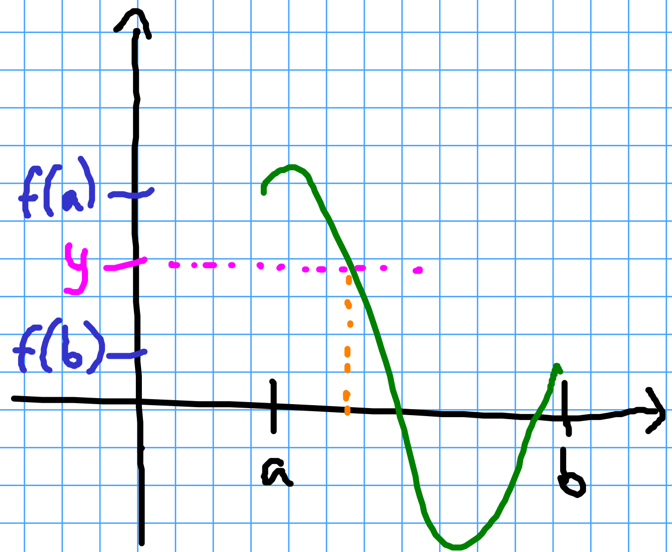
ist stetig im Nullpunkt



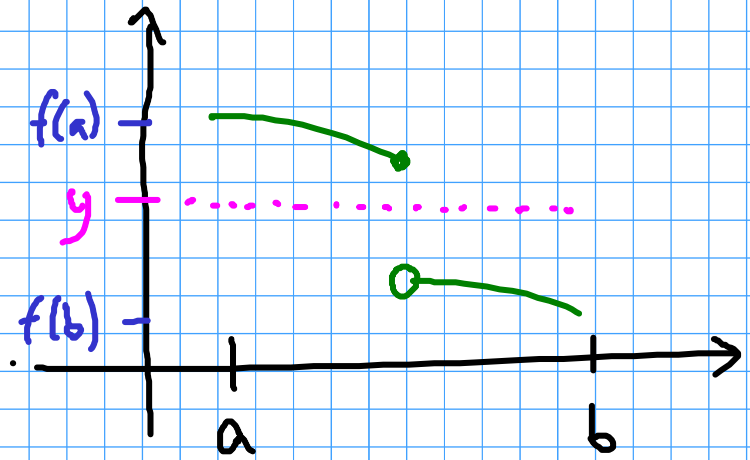
Ein weiterer wichtiger Satz über stetige Funktionen ist der Zwischenwertsatz:

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig

Dann gibt es zu jedem y zwischen $f(a)$ und $f(b)$ mindestens ein $x \in [a,b]$ derart, dass $y = f(x)$ ist.



Wir werden diesen Satz im Laufe des ersten Semesters formal beweisen.

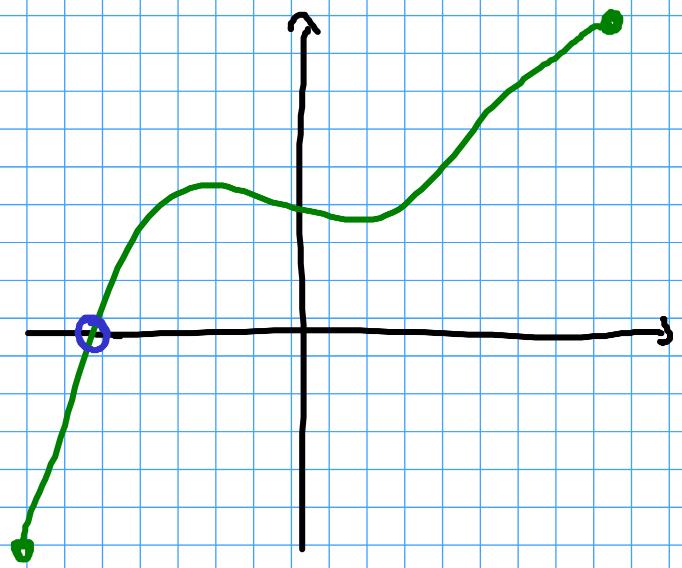


Hier gibt es kein „passendes" x

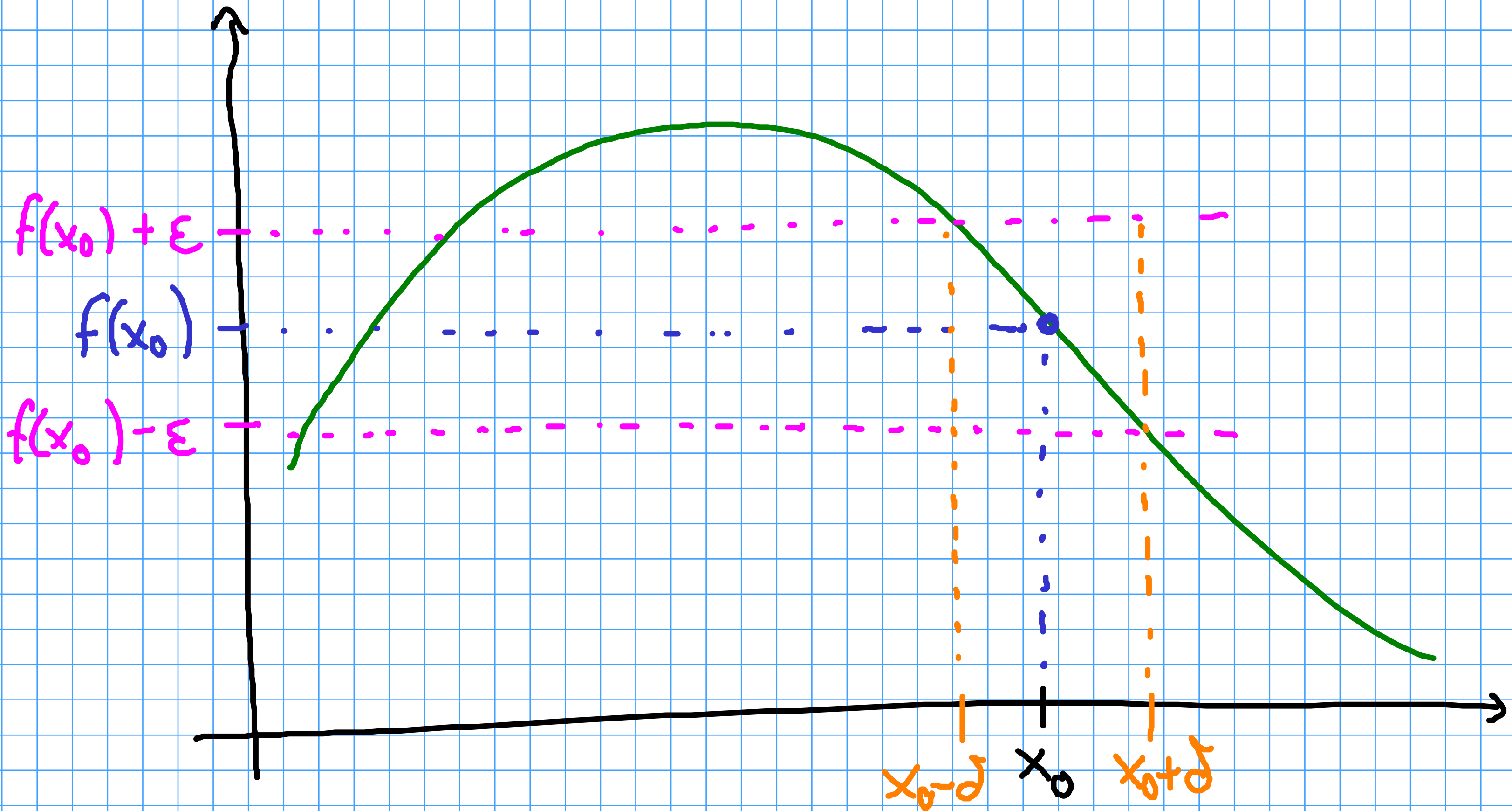
Folgerung: Die Gleichung $c_3 x^3 + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0$

(mit gegebenen $c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$, $c_3 \neq 0$)

besitzt in $\mathbb{R}$ mindestens eine Lösung.



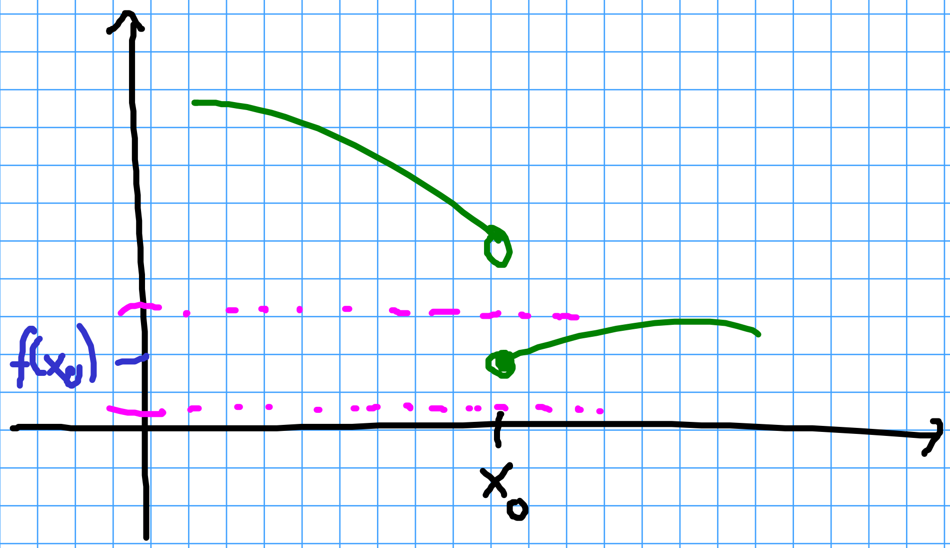
Für „Experten": Klassische Definition der Stetigkeit



Wenn wir eine „Toleranz" ε vorgeben, so finden wir eine Umgebung von x_0 derart, dass die Funktionswerte dort um weniger als ε von $f(x_0)$ abweichen.

Definition: Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt <u>stetig</u> in $x_0 \in D$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : f(x) \in \big(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon \big)$$



Für dieses ε gibt es kein passendes δ

also ist f nicht stetig in x_0.