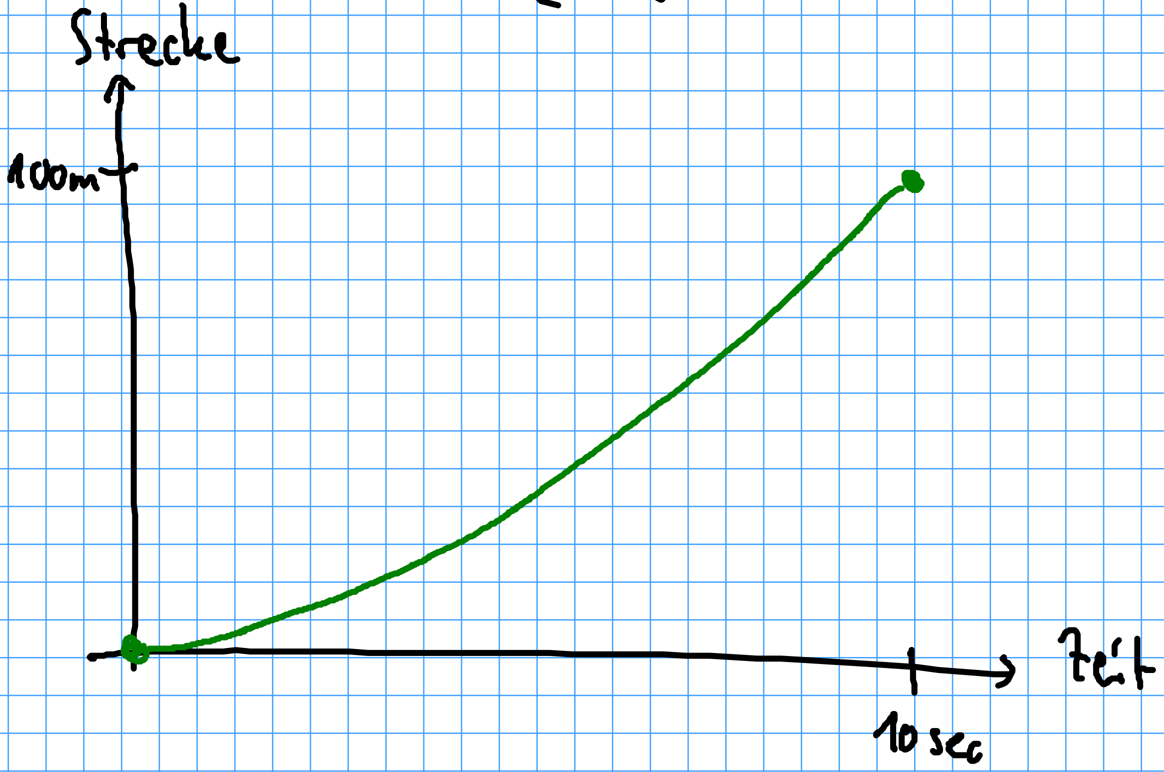
9. Differentiation

Beispiel: Ein 100m-Läufer läuft die Strecke in 10 Sekunden

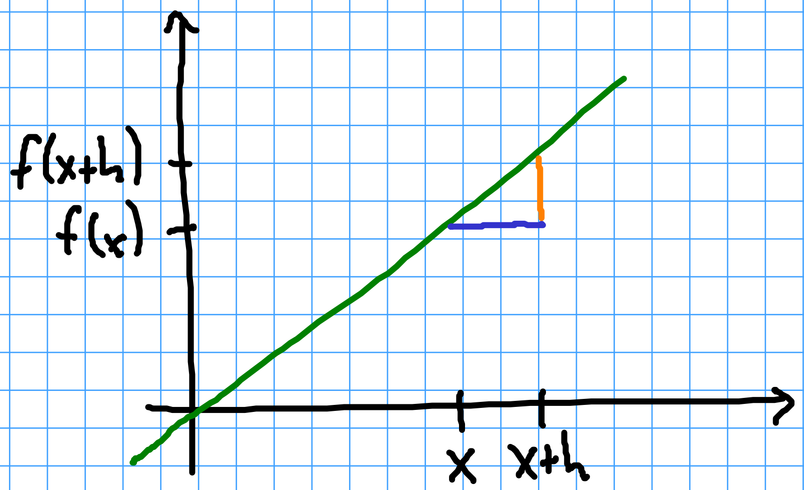
- In der ersten Sekunde schafft er keine 10 Meter
- Im späteren Verlauf des Rennens schafft er innerhalb einer Sekunde mehr als 10 Meter.



Frage: Was ist hier unter „Geschwindigkeit" zu verstehen?

Kann man die „Steigung" des Funktionsgraphen an einer gegebenen Stelle messen?

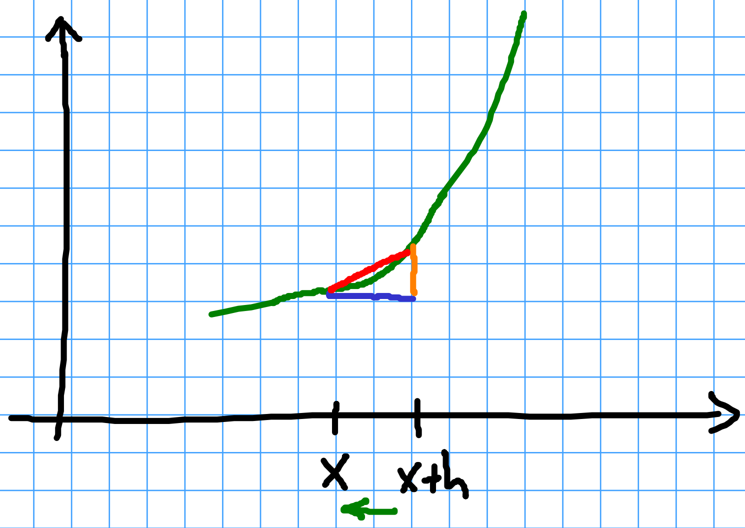
Im Fall einer Geraden ist das einfach



Als Steigung definiert man den Wert

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

<u>Idee</u>



- Ist $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ gegeben, so betrachte den Funktionswert an einer Stelle $x\in(a,b)$ und an einer weiteren Stelle $x+h$
- Bestimme den so genannten Differenzenquotient $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
- Existiert ein Grenzwert für $h\to 0$?

Definition: Eine Funktion $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ heißt <u>differenzierbar</u> in einem Punkt $x\in(a,b)$, falls

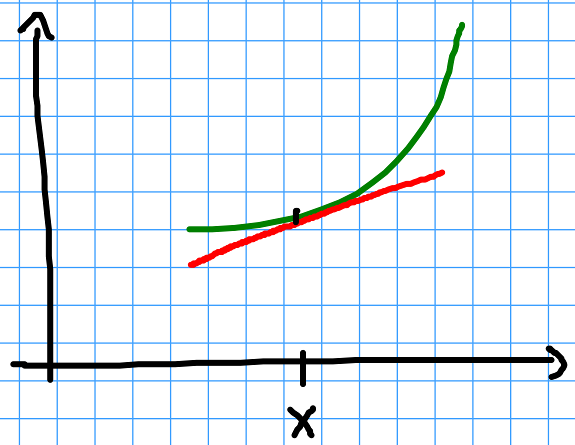
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{existiert.}$$

Man bezeichnet diesen Wert dann als <u>Ableitung</u> von f in x und schreibt dafür

$$f'(x)$$

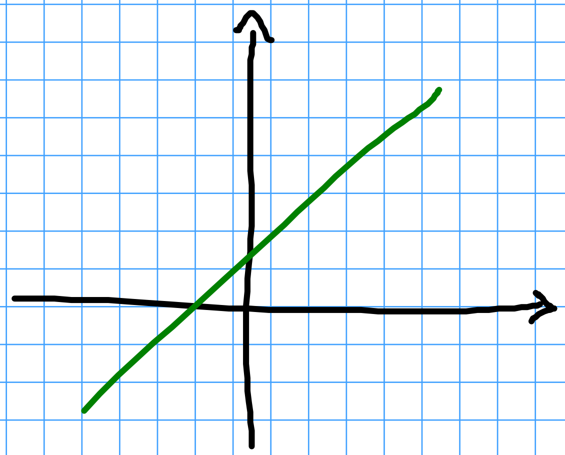
[ebenfalls gebräuchliche Schreibweise $\frac{d}{dx}f(x)$]

Grafisch:



Die Ableitung misst die Steigung der Tangente an den Funktionsgraphen.

Beispiele: (1) $f(x) = mx + c$ $\quad$ ($m, c \in \mathbb{R}$ gegeben)

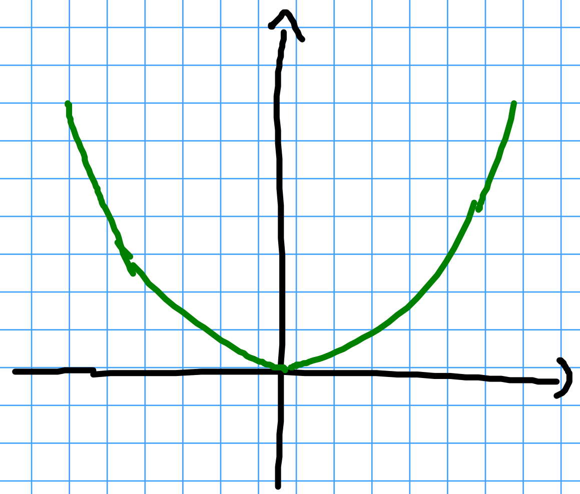


Hier ist $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{m(x+h) + c - (mx + c)}{h}$

$$= \frac{mh}{h} = m$$

$\lim\limits_{h \to 0} m = m$, also $f'(x) = m$

(2) $f(x) = x^2$. Hier haben wir



$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2hx + h^2}{h} = 2x + h$$

Es ist $\lim\limits_{h \to 0} 2x + h = 2x$, also $f'(x) = 2x$

(3) $f(x) = x^n \qquad (n \in \mathbb{N},\ n \geq 3)$

Hier ist

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{(\cancel{x^n} + nx^{n-1}h + \dots + h^n) \cancel{-x^n}}{h}$$

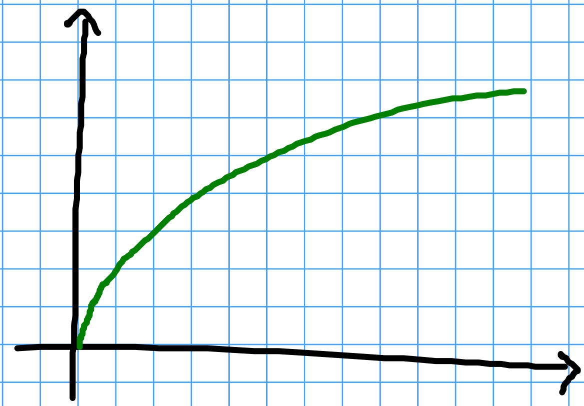
$$= \frac{nx^{n-1}h}{h} + \dots$$

$$= nx^{n-1} + \dots$$

Bei allen weiteren Summanden bleibt eine Potenz von h im Zähler übrig – konvergiert gegen 0

also $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(nx^{n-1} + \dots \right) = nx^{n-1}$$

(4) $\quad f(x) = \sqrt{x}$ $\qquad$ zunächst für $x > 0$



Hier ist

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}{h \quad \left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}$$

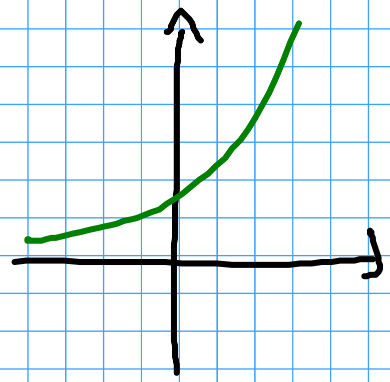
$$= \frac{x+h - x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \xrightarrow{h \to 0} \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

also $\quad f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

<u>Beobachtung</u>: Für $x \to 0$ gilt „$\frac{1}{2\sqrt{x}} \to \infty$", die Steigung des Funktionsgraphen im Nullpunkt ist „unendlich" (senkrechte Tangente)

Für „Kenner"

$f(x) = e^x \quad , \quad f'(x) = e^x$



$f(x) = \sin x \quad , \quad f'(x) = \cos x$

$f(x) = \cos x \quad , \quad f'(x) = -\sin x$

Rechenregeln: Seien f und g differenzierbare Funktionen. Dann gilt

(1) $(f+g)' = f' + g'$

(2) $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

(3) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

Satz (Kettenregel) Seien $f:(a,b)\to(c,d)$ und $g:(c,d)\to\mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist $g\circ f$ differenzierbar und

$$(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x)$$

Zur Erinnerung:
$g\circ f(x) = g(f(x))$

Beispiel: $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\quad h(x)=\sqrt{x^2+1}$

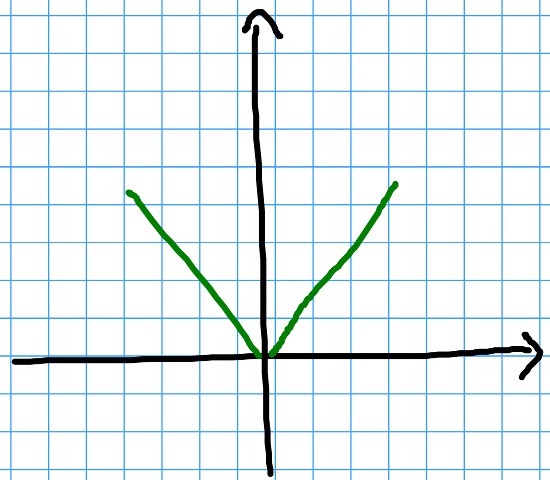
[etwa $f(x)=x^2+1$, $g(x)=\sqrt{x}$ dann ist $(g\circ f)(x) = h(x)$]

Also $\quad h'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Satz: Wenn eine Funktion $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ im Punkt x differenzierbar ist, dann ist f dort auch stetig.

Bemerkung: Die Umkehrung gilt nicht allgemein!

So ist z.B. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|$ im Nullpunkt stetig, aber nicht differenzierbar

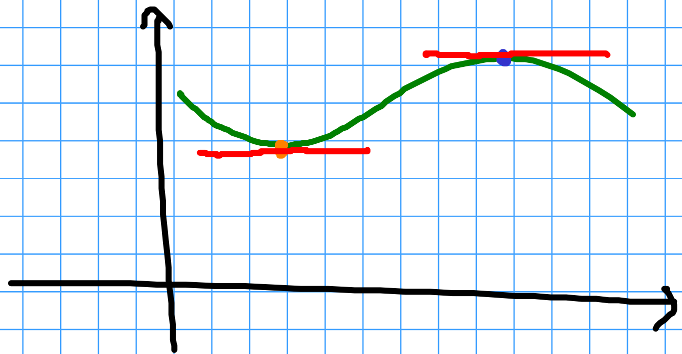


$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{|h|}{h}=\begin{cases}1 & \text{für } h>0\\ -1 & \text{für } h<0\end{cases}$$

Ein Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ existiert nicht!

Es gibt sogar eine auf ganz $\mathbb{R}$ stetige aber in keinem Punkt differenzierbare Funktion (kompliziert zu konstruieren!)

Anwendung: Extremwertbestimmung (suche Maximum / Minimum)



Satz: Sei $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Wenn f an einer Stelle $x_0 \in (a,b)$ ein Maximum oder Minimum hat, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

Die Umkehrung gilt nicht allgemein!