# 11. Norm, Skalar- und Vektorprodukt

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine $(m \times n)$-Matrix.

Dann heißt $A^T := (a_{ji}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ die zu A transponierte Matrix.

Beispiele:

(1) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$$

(2) $$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten den Raum $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ mal}}$

Das ist die Menge aller n–Tupel reeller Zahlen.

Wir wollen diese zunächst als Spalten schreiben, etwa

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

<u>Beispiel</u>

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Wir können dies als Matrix mit 3 Zeilen und 1 Spalte auffassen

$$v^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir nehmen noch ein Element $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Dann ist $v^T w = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 3 + 0 \cdot 2 = -7$

Das Matrix-Produkt („Zeile mal Spalte") liefert hier eine „Matrix" mit nur einer Zeile und einer Spalte, also eine reelle Zahl.

Definition: Sei $n \in \mathbb{N}$. Für $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ heißt

$$\langle v, w \rangle = v^T w = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = \boxed{v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots + v_n w_n}$$

das (Standard-) Skalarprodukt von $v$ und $w$

**Eigenschaften des Skalarprodukts**: Für $u, v, w \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) $$\langle v, cw \rangle = c \langle v, w \rangle$$
$$\langle u, v+w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$$
(„Linearität")

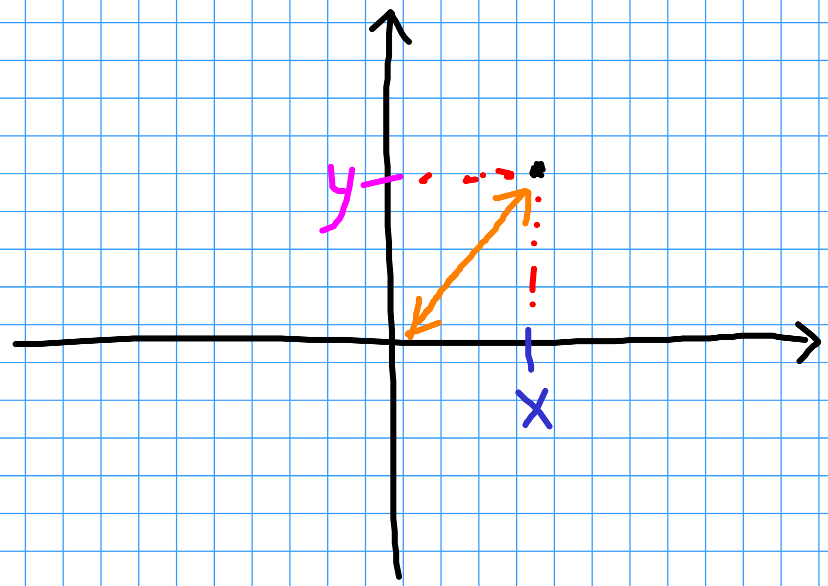
(b) $$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$$
(„Symmetrie")

(c) $$\langle v, v \rangle \geq 0$$

und $$\langle v, v \rangle = 0 \iff v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$
(„positive Definitheit")

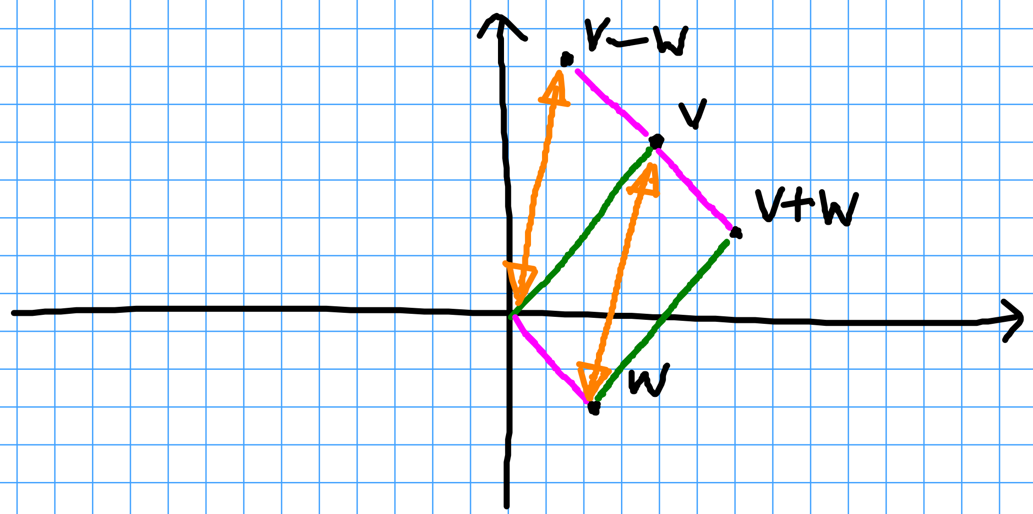
## Betrachte nun $\mathbb{R}^2$

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$




Der Abstand von $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ zum Nullpunkt beträgt

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$




Der Abstand von v zu w ist genau so groß, wie der Abstand von v−w zum Nullpunkt, also

$$\sqrt{\langle v-w, v-w \rangle}$$

Definition: Für $v \in \mathbb{R}^n$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ heißt

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}$$

die (euklidische) Norm von $v$

(der Abstand von $v$ zum Nullpunkt)

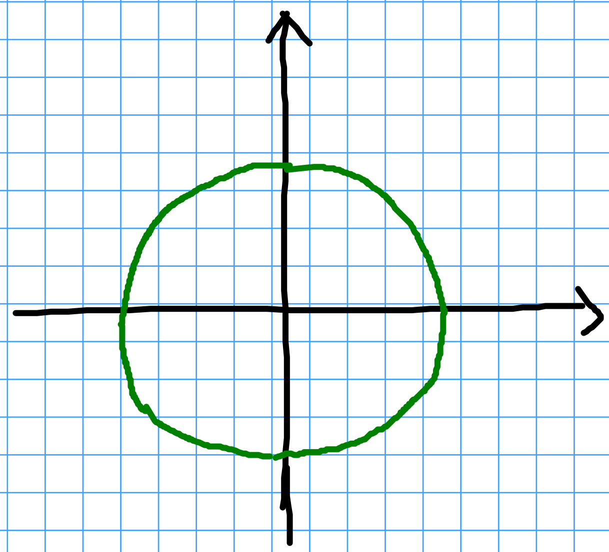
Für $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ heißt

$\sqrt{\langle v-w, v-w \rangle} = \|v-w\|$ der (euklidische) Abstand von $v$ und $w$

Ein $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$ heißt <u>normiert</u>.

## zurück zu $\mathbb{R}^2$:

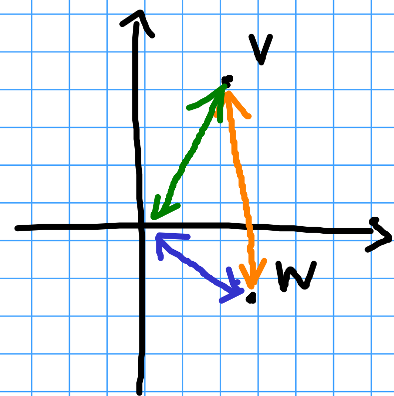
Die Menge $\{v \in \mathbb{R}^2 \mid \|v\| = 1\}$ ist ein Kreis um den Nullpunkt mit Radius 1.



**Eigenschaften der Norm:** Für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) $\|cv\| = |c|\,\|v\|$

(b) $\|v-w\| \leq \|v\| + \|w\|$ „Dreiecksungleichung"




(c) $|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\,\|w\|$

„Cauchy-Schwarz-Ungleichung"

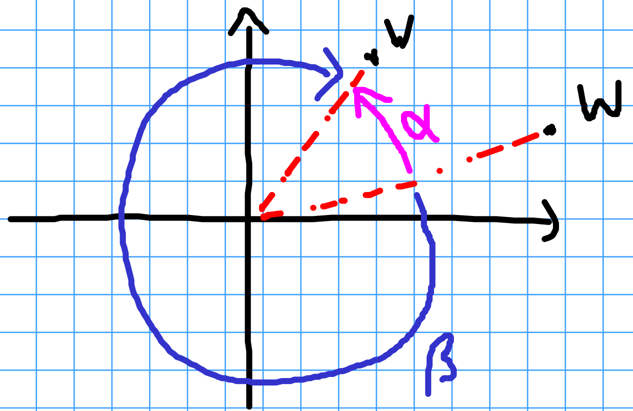
**Bemerkung:** Wegen $(<)$ gilt

$$\frac{|\langle v,w\rangle|}{\|v\|\,\|w\|} \leq 1 \qquad \text{falls } v \neq \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \text{ und } w \neq \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

also $$-1 \leq \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\,\|w\|} \leq 1$$

Es gibt genau ein $\alpha \in [0,\pi]$ derart, dass $\cos(\alpha) = \dfrac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\,\|w\|}$

Dieses $\alpha$ bezeichnen wir als <u>Winkel</u> zwischen $v$ und $w$.



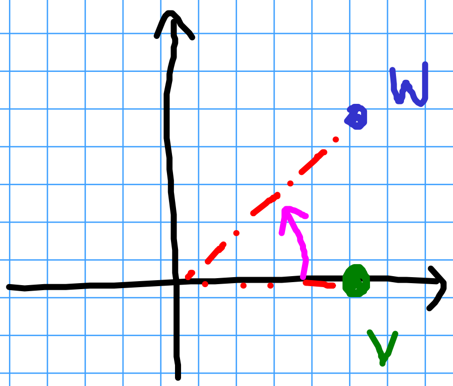

<u>Schreibweise:</u> $\sphericalangle(v,w) = \alpha$

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\,\|w\|} = \cos(\beta)$$

$$\notin [0,\pi]$$

**Beispiel:**

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$




$$\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \, \|w\|} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \underbrace{\cos(\alpha)}_{\text{gesucht}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

**Beobachtung:** Seien $v, w \in \mathbb{R}^2$, $\|v\| \neq 0$, $\|w\| \neq 0$. Damit haben wir

$$\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \, \|w\|} = 0 \iff \langle v, w \rangle = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\cos(\measuredangle(v,w)) = 0 \iff \measuredangle(v,w) = \frac{\pi}{2} \quad (\text{entspricht } 90^\circ)$$

**Definition** Sei $n \in \mathbb{N}$. Zwei Elemente $v, w \in \mathbb{R}^n$ heißen **senkrecht** (oder **orthogonal**), wenn $\langle v, w \rangle = 0$

**Schreibweise**: $v \perp w$

**Jetzt $n=3$**: Für $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ heißt

$$v \times w := \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$$

das **Vektorprodukt** oder **Kreuzprodukt** von $v$ und $w$

Es gilt (a) $(v \times w) \perp v$ und $(v \times w) \perp w$

(b) $\|v \times w\| = \|v\| \, \|w\| \sin\big(\sphericalangle(v,w)\big)$

$=$ Flächeninhalt des Parallelogramms, das von $v, w$ und $v+w$ aufgespannt wird.