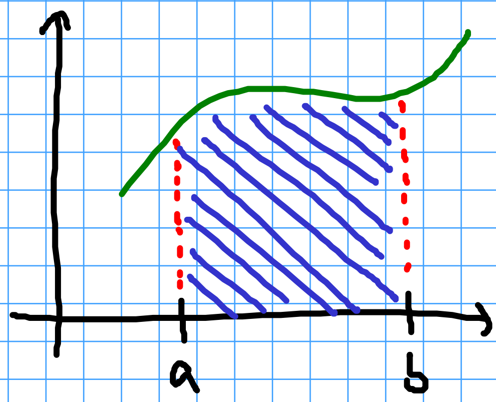
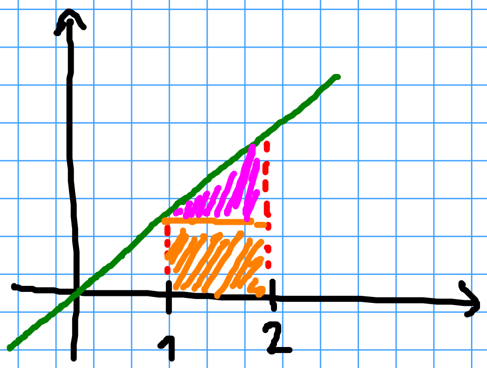
13. Integration

Historische Motivation: Bestimme „Flächeninhalt unter einem Funktionsgraphen"



<u>Beispiel</u>: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$

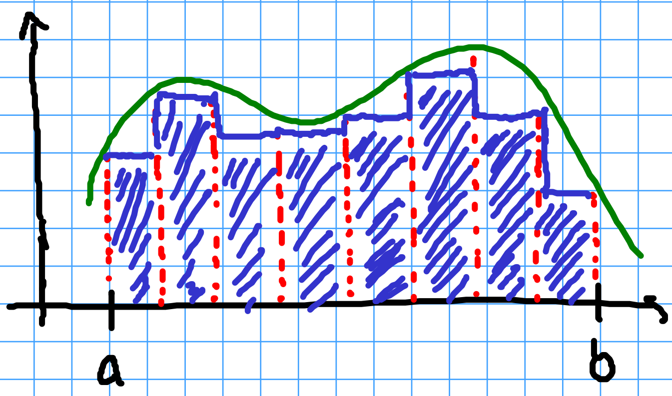


Gesucht: Inhalt der Fläche, die im Intervall $[1,2]$ von Funktionsgraph und x-Achse eingeschlossen ist.

Gesuchte Fläche

= Fläche (▭) + Fläche (◺) $= \frac{3}{2}$

Allgemein:



Bestimme den Flächeninhalt zunächst näherungsweise, z.B. als Fläche von geeignet gewählten Rechtecken.

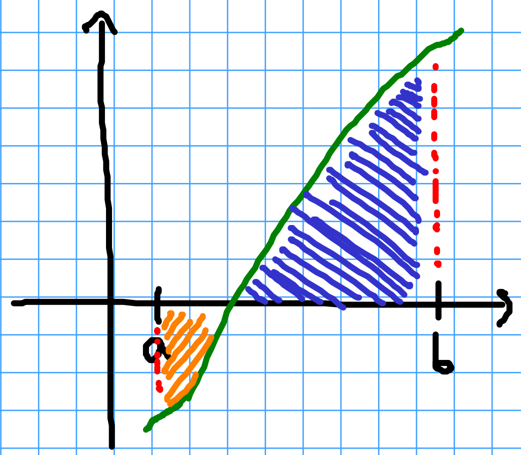
Problem: Kann man den gesuchten Flächeninhalt exakt bestimmen, wenn man die Rechtecke „immer schmaler" macht?

Was genau ist darunter zu verstehen?

Gibt es möglicherweise verschiedene Vorgehensweisen, die auf unterschiedliche Ergebnisse führen? Das wäre ärgerlich (→ 1. Semester)

Den vorzeichenbehafteten Flächeninhalt bezeichnen wir als Integral und schreiben

$$\int_a^b f(x)\,dx$$



„Vorzeichenbehaftet" bedeutet, dass Flächenstücke unterhalb der x-Achse negativ in das Ergebnis eingehen, in nebenstehendem Beispiel

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{Fläche oben} - \text{Fläche unten}$$

Im ersten Beispiel von vorhin: $\int_1^2 x \, dx = \frac{3}{2}$

Das Integral kann man leicht bestimmen, wenn man eine Stammfunktion kennt.

Definition: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
Eine weitere Funktion $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von f, wenn F differenzierbar ist und $F' = f$ gilt.

Beispiel: $f(x) = 2x$. Dann ist $F(x) = x^2$ eine Stammfunktion von f
(Auch $F(x) = x^2 + 3$ ist eine Stammfunktion von f)

Satz: Wenn f eine Stammfunktion besitzt, so ist diese bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt.

Satz: Seien $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine Funktion und F eine Stammfunktion von f.

Dann gilt
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)}$$

Zurück zum ersten Beispiel: Gesucht war $\int_1^2 x\,dx$

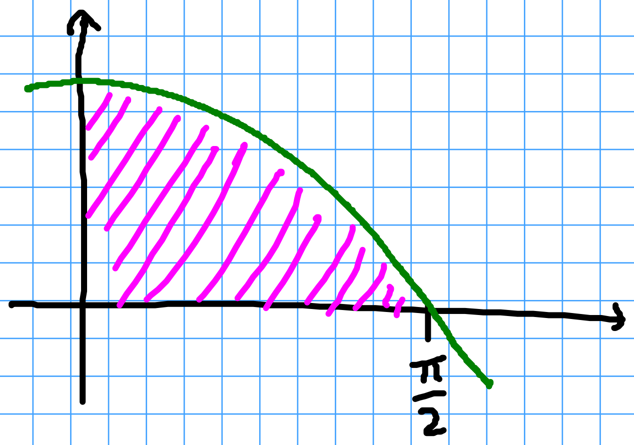
Eine Stammfunktion zu $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$, lautet $F(x)=\frac{1}{2}x^2$

$$\Rightarrow \int_1^2 f(x)\,dx = F(2)-F(1) = \frac{1}{2}\cdot 2^2 - \frac{1}{2}\cdot 1^2 = \frac{3}{2}$$

Schreibweisen: Statt $F(b)-F(a)$ schreibt man auch $F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$

oder $F(x)\Big|_a^b$

Beispiel: $$\int_0^{\pi/2} \cos(x)\,dx = \sin(x)\Big|_0^{\pi/2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1 - 0 = 1$$



Es ist nicht immer einfach, eine Stammfunktion zu finden!

Gibt es überhaupt immer eine Stammfunktion?

Wenn es keine Stammfunktion gibt – was dann?

$\rightarrow$ 1./2. Semester

Partielle Integration

Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen, F eine Stammfunktion von f.

Die Produktregel für Ableitungen liefert

$$(F \cdot g)' = F' \cdot g + F \cdot g' = f \cdot g + F \cdot g' \text{, also } \boxed{f \cdot g = (F \cdot g)' - F \cdot g'}$$

Damit ergibt sich

$$\int_a^b f(x) g(x)\, dx = \int_a^b \left[(F \cdot g)'(x) - F(x) g'(x) \right] dx$$

$$= \int_a^b (F \cdot g)'(x)\, dx - \int_a^b F(x) g'(x)\, dx$$

$$= F(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b F(x) g'(x)\, dx$$

<u>Beispiele:</u>

(1)

$$\int_0^1 x e^x \, dx = e^x \cdot x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x \cdot 1 \, dx$$

$f(x) = e^x \quad F(x) = e^x$

$g(x) = x \quad g'(x) = 1$

$$= e^1 \cdot 1 - e^0 \cdot 0 - \int_0^1 e^x \, dx$$

$$= e - e^x \Big|_0^1$$

$$= e - (e-1) = 1$$

(2)

$$\int_1^2 \ln(x) \, dx = x \ln(x) \Big|_1^2 - \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x} \, dx = \ldots$$

$f(x) = 1 \quad F(x) = x$

$g(x) = \ln(x)$

Substitutionsregel: Sei $f : [A,B] \to \mathbb{R}$ stetig und

$\varphi : [a,b] \to [A,B]$ stetig differenzierbar (d.h. φ' ist stetig)

sowie F eine Stammfunktion von f.

Dann gilt

$$(F \circ \varphi)'(x) = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

$$\boxed{\int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,dx} = \int_a^b (F\circ\varphi)'(x)\,dx = F\circ\varphi\,(x)\Big|_a^b = F\circ\varphi\,(b) - F\circ\varphi\,(a)$$

$$= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \boxed{\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx}$$

Beispiele (1)

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} \, dx = \int_1^4 \underbrace{f(\varphi(x))}_{= 2e^{-\sqrt{x}}} \cdot \underbrace{\varphi'(x)}_{\frac{1}{2\sqrt{x}}} \, dx$$

$\varphi(x) = \sqrt{x}$

$\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(y) = 2e^{-y}$

$f(\varphi(x)) = 2e^{-\sqrt{x}}$

$$= \int_{\varphi(1)}^{\varphi(4)} f(x) \, dx = \int_1^2 2e^{-x} \, dx = -2e^{-x} \Big|_1^2$$

(2) hier „von rechts nach links"

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \overset{x=\sin(y)}{=} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(y)} \cdot \underbrace{\cos(y)}_{\sin'(y)}\,dy$$

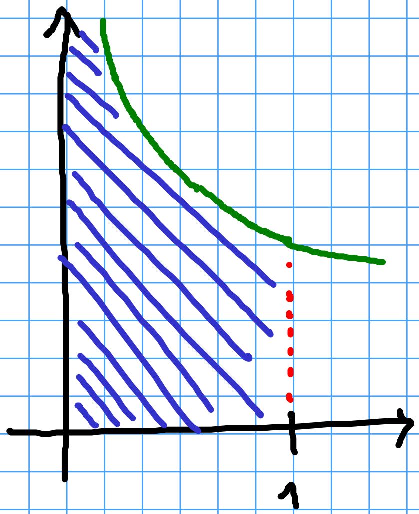
$$= \int_0^{\pi/2} \cos(y) \cdot \cos(y)\,dy = \int_0^{\pi/2} \cos^2(y)\,dy$$

(2x partiell Int.)

$= \;\; \ldots \;\; =$

Uneigentliche Integrale

Beispiel: $f : (0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$



Eine Stammfunktion lautet $F(x) = 2\sqrt{x}$

Obwohl $f(0)$ nicht definiert ist, existiert $F(0)$.

Man schreibt $F(1) - F(0) = \int_0^1 f(x)\,dx$

Unbestimmtes Integral:

Man benutzt das Symbol $\int f(x)\,dx$ in der Bedeutung

„eine Stammfunktion von f"

Man schreibt beispielsweise $\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$

Symbolisiert die „beliebige" Konstante