14. Komplexe Zahlen

Historische Entwicklung: Gesucht sind Lösungen einer Gleichungen der Form

$$x^3 = ax + b$$

(mit gegebenen $a, b \in \mathbb{R}$)

Bereits im 16. Jahrhundert war bekannt, dass

$$\sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

eine Lösung ist – sofern dies überhaupt existiert.

Beispiel: $x^3 = 15x + 4$ (also $a = 15$, $b = 4$). Wenn wir obige Formel anwenden wollen, erhalten wir $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 4 - 125$, eine negative Zahl unter der Wurzel.

Frage: Kann man „Wurzeln aus negativen Zahlen" irgendwie erklären, sodass man sinnvoll damit rechnen kann?

Versuch: Nimm zu $\mathbb{R}$ eine „imaginäre Einheit" i hinzu und setze

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Um damit rechnen zu können, wollen wir auch Vielfache dieser Zahl erklären und sie zu reellen Zahlen addieren können.

Definition: Die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist gegeben durch

$$\mathbb{C} := \{ x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \}$$

Wir erklären Addition und Multiplikation wie folgt

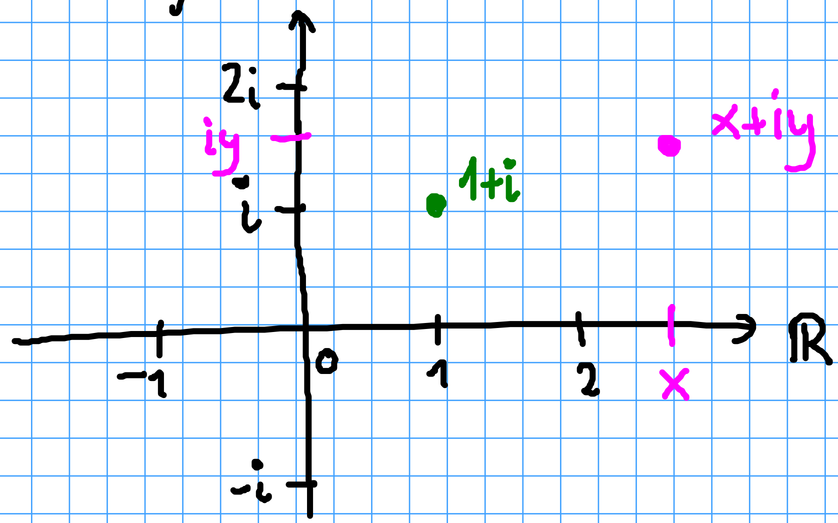
$$(x+iy)+(u+iv) := (x+u)+i(y+v)$$

$$(x+iy)\cdot(u+iv) := xu + xiv + uiy + i^2 yv$$

$i^2=-1$

$$= (xu-yv)+i(xv+uy)$$

Üblicherweise stellt man $\mathbb{C}$ grafisch als Ebene dar



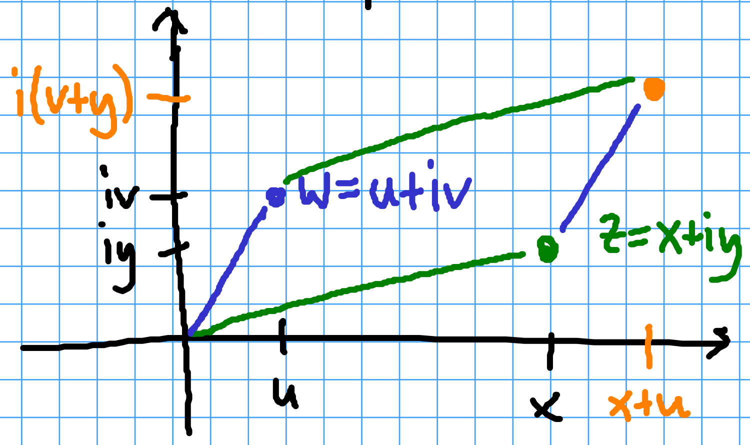
Ist $z = x + iy \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl, so heißt

$$\operatorname{Re} z := x \quad \text{der Realteil von } z$$
$$\operatorname{Im} z := y \quad \text{der Imaginärteil von } z$$

Wir können $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auffassen

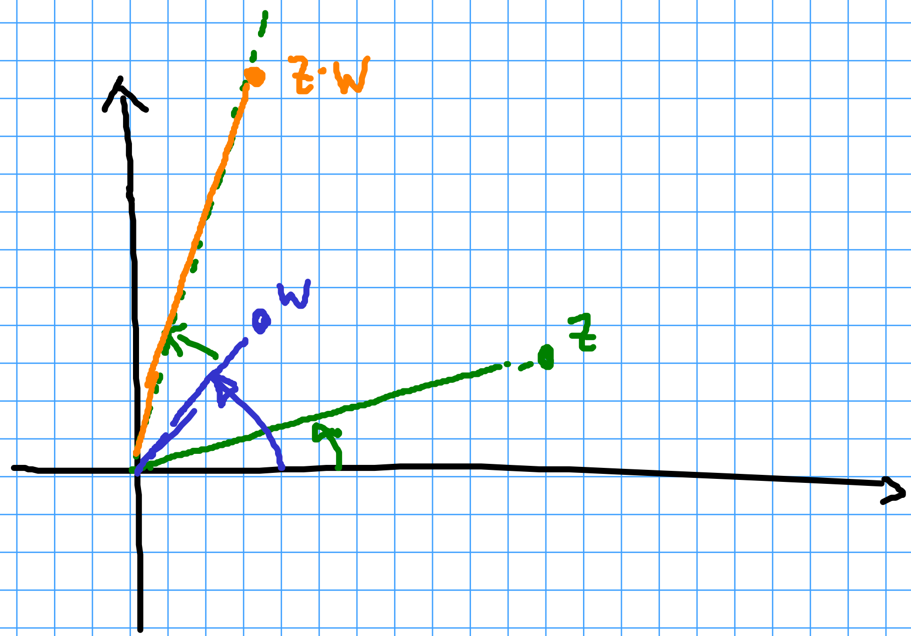
$$\mathbb{R} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0 \} = \{ z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y = 0 \}$$

Grafisch können wir die Addition komplexer Zahlen wie folgt darstellen

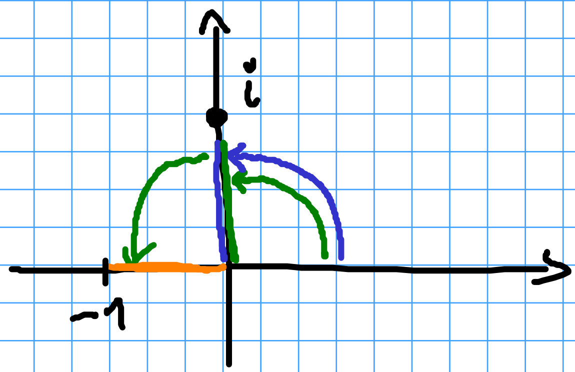


Bei der Multiplikation (nicht auf Anhieb ersichtlich)

„Winkel addieren, Längen Multiplizieren"



Beispiel:



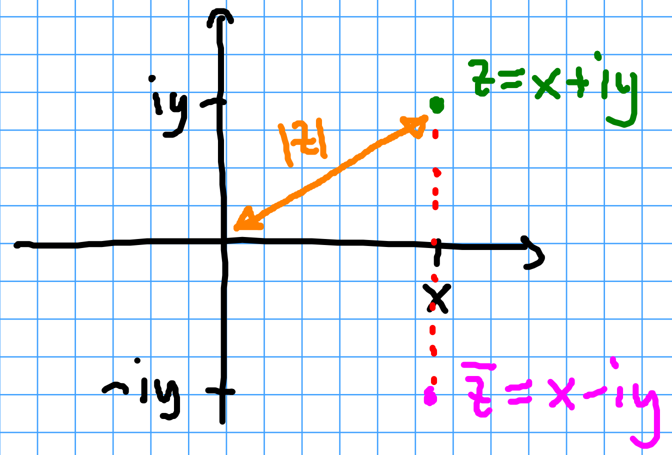
$i \cdot i = i^2 = -1$

Weitere Definitionen

Sei $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$

Dann heißt $\bar{z} := x - iy$ die zu z konjugiert komplexe Zahl.

und $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ der Betrag von z (Abstand von z zu 0)



insbesondere für reelle Zahlen $x \in \mathbb{R}$:

$$x = x + 0i, \quad |x| = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Weiter ist $z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$

Weitere Rechenregeln: Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

(a) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ und $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

(b) $|zw| = |z|\,|w|$

(c) $|z+w| \leq |z| + |w|$

(d) $\big|\,|z| - |w|\,\big| \leq |z+w|$

(e) $\overline{i} = -i$

(f) $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$

(g) $|i| = 1$

(selbst nachrechnen!)

Division komplexer Zahlen:

$$i^2 = -1$$

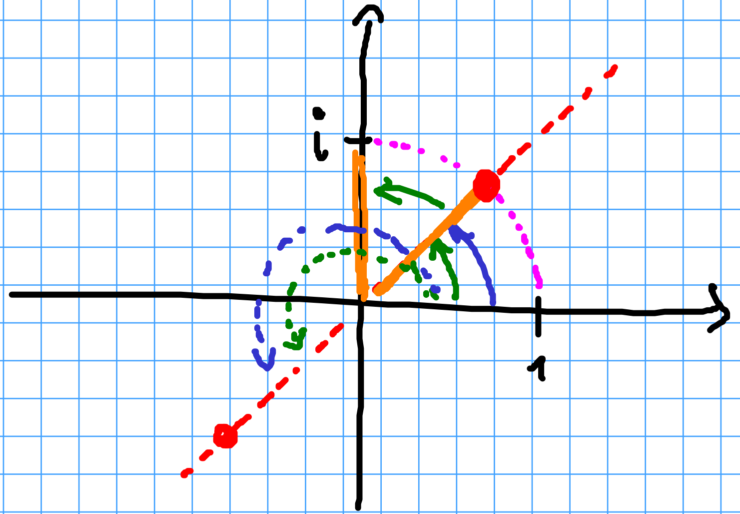
Beispiel: $$\frac{2-3i}{5+6i} = \frac{(2-3i)(5-6i)}{(5+6i)(5-6i)} = \frac{10-12i-15i+18i^2}{5^2-(6i)^2} = \frac{-8-27i}{25+36} = -\frac{8}{61} - \frac{27}{61}i$$

Existenz von Wurzeln

Beispiel: Suche $z \in \mathbb{C}$ mit $z^2 = i$

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i$$

und $$-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i$$



$$(-z)^2 = ((-1)\cdot z)^2 = (-1)^2 \cdot z^2 = z^2$$

Zu jeder komplexen Zahl $w \neq 0$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau n verschiedene komplexe Zahlen, die die Gleichung $z^n = w$ lösen

Für „Kenner": Der <u>Fundamentalsatz der Algebra</u> :

Die Gleichung $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n = 0$

(mit gegebenen $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$)

besitzt in $\mathbb{C}$ mindestens eine Lösung.

– Im Gegensatz zu $\mathbb{R}$! Beispielsweise hat $1 + z^2 = 0$ in $\mathbb{R}$ keine Lösung.

<u>Zur Exponentialfunktion</u> :

Für $x \in \mathbb{R}$ ist $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^2 + \frac{1}{720}x^6 + \dots$

Was ist e^{iy} ? $(y \in \mathbb{R})$

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{1}{2}(iy)^2 + \frac{1}{6}(iy)^3 + \frac{1}{24}(iy)^4 + \frac{1}{120}(iy)^5 + \frac{1}{720}(iy)^6 + \dots$$

$$= 1 + iy - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{6}y^3 i + \frac{1}{24}y^4 + \frac{1}{120}y^5 i - \frac{1}{720}y^6 \pm \dots$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{24}y^4 - \frac{1}{720}y^6 \pm \dots\right) + i\left(y - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{120}y^5 \pm \dots\right)$$

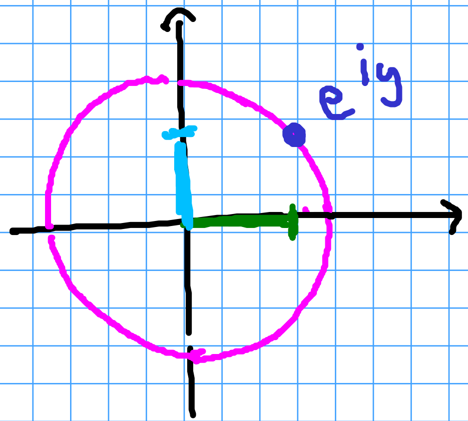
$$\boxed{\begin{aligned} i^2 &= -1 \\ i^3 &= -i \\ i^4 &= 1 \\ i^5 &= i \\ &\vdots \end{aligned}}$$

Außerdem ist

$$\boxed{z \cdot \bar{z} = |z|^2}$$

$$1 = e^0 = e^{iy-iy} = e^{iy} \cdot e^{-iy} = e^{iy} \cdot e^{\overline{iy}} = e^{iy} \cdot \overline{e^{iy}} = \left|e^{iy}\right|^2$$

Daraus folgt $\quad |e^{iy}| = 1$



- $\operatorname{Re}(e^{iy}) = 1 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{24}y^4 - \frac{1}{720}y^6 \pm \dots = \cos(y)$
- $\operatorname{Im}(e^{iy}) = y - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{120}y^5 \pm \dots = \sin(y)$

Eulersche Formel $\quad \boxed{e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y)} \quad$ für $y \in \mathbb{R}$

Allgemeiner: Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ $(x, y \in \mathbb{R})$ ist

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \left(\cos(y) + i \sin(y) \right)$$

$$= e^x \cos(y) + i \, e^x \sin(y)$$

Weiter ist

$$\cos(y) = \frac{1}{2} \left(e^{iy} + e^{-iy} \right)$$

$$\sin(y) = \frac{1}{2i} \left(e^{iy} - e^{-iy} \right)$$